УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СВОБОДНОМ ОПИРАНИИ ДВУХ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ КРАЕВ

А.В. Аристамбекова

Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем, Саратов

aristambekovaav@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается статический и вибрационный изгиб многослойной прямоугольной пластинки, составленной из N ортотропных слоев произвольной толщины. Считается, что два края пластинки свободно оперты, а два других закреплены произвольно. Предлагается численный метод решения этой задачи. Результаты численных расчетов представлены в виде таблиц и графиков.

Ключевые слова: ортотропная пластинка, изгиб, вибрация, численное решение, дискретная ортогонализация.

Рассматривается многослойная прямоугольная пластинка, имеющая размеры в плане $a\times b$ и толщиной H. Пластинка состоит из ортотропных слоев с толщинами h_k, $k=\overline{1,N}$ (рис. 1).

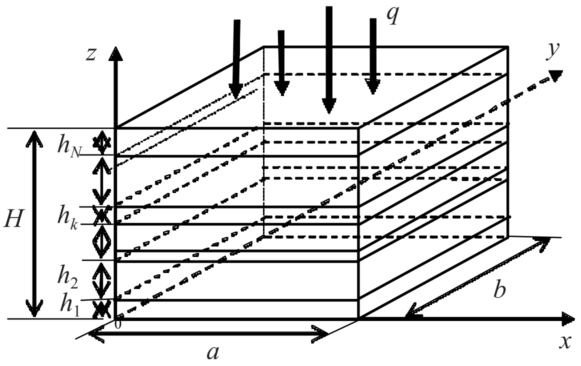

Рис. 1

Пластинка находится под действием нагрузки интенсивности

$$q(x,y,t)=p_0(y)\sin\frac{m\pi x}{a}\exp(i\omega t),$$

которая распределена по плоскости $z=H$. Края $x=0$, $x=a$ предполагаются свободно опертыми, а края $y=0$, $y=b$ закреплены произвольно. Считается, что деформации пластинки малы и подчиняются закону Гука [1].

Для определения проекций вектора смещения и напряжений k-слоя записывается система уравнений, состоящая из уравнений движения сплошной среды и уравнений обобщенного закона Гука.

Все характеристики напряженно-деформированного состояния k-слоя будем искать в виде

$$f^{(k)}(x,y,z,t)=\tilde f^{(k)}(x,y,z)\exp(i\omega t).$$

Тогда для амплитудных значений искомых величин получается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial\tilde\sigma_x^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde\tau_{xy}^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial\tilde\tau_{xz}^{(k)}}{\partial z}+\rho_k\omega^2\tilde u^{(k)}=0 \quad (1)$$

$$(x\Leftrightarrow y\Leftrightarrow z;\ k=\overline{1,N});$$

$$\tilde\sigma_x^{(k)}=A_{11}^{(k)}\frac{\partial\tilde u^{(k)}}{\partial x}+A_{12}^{(k)}\frac{\partial\tilde v^{(k)}}{\partial y}+A_{13}^{(k)}\frac{\partial\tilde w^{(k)}}{\partial z};$$

$$\tilde\tau_{yz}^{(k)}=A_{44}^{(k)}\left(\frac{\partial\tilde v^{(k)}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde w^{(k)}}{\partial y}\right) \quad (2)$$

$$(x\Leftrightarrow y\Leftrightarrow z;\quad 1\Leftrightarrow 2\Leftrightarrow 3;\quad 4\Leftrightarrow 5\Leftrightarrow 6;$$
$$\tilde u^{(k)}\Leftrightarrow\tilde v^{(k)}\Leftrightarrow\tilde w^{(k)},\quad k=\overline{1,N}).$$

Здесь через $A_{ij}^{(k)}$ обозначены упругие постоянные, ρ_k – плотность материала k-го слоя.

Решение уравнений (1), (2) должно подчиняться условиям на верхней и нижней плоскостях:

при $z=0$

$$\tilde\sigma_z^{(1)}=0,\quad \tilde\tau_{xz}^{(1)}=0,\quad \tilde\tau_{yz}^{(1)}=0,$$

при $z=H$

$$\tilde\sigma_z^{(1)}=-p_0(y)\sin\frac{m\pi x}{a},\ \tilde\tau_{xz}^{(1)}=0,\ \tilde\tau_{yz}^{(1)}=0; \quad (3)$$

на поверхностях контакта смежных слоев:

при $z=b_k$

$$\tilde u^{(k)}=\tilde u^{(k+1)},\quad \tilde v^{(k)}=\tilde v^{(k+1)},\quad \tilde w^{(k)}=\tilde w^{(k+1)},$$
$$\tilde\sigma_z^{(k)}=\tilde\sigma_z^{(k+1)},\quad \tilde\tau_{xz}^{(k)}=\tilde\tau_{xz}^{(k+1)}, \quad (4)$$
$$\tilde\tau_{yz}^{(k)}=\tilde\tau_{yz}^{(k+1)}\quad (k=\overline{1,N-1}),$$

на боковых краях $x=0$, $x=a$, $\tilde v^{(k)}=\tilde w^{(k)}=0$, $\tilde\sigma_x^{(k)}=0$; условия на краях $y=0$, $y=b$ записываются в соответствии со способом их закрепления.

Для понижения размерности краевой задачи (1)–(4) функции $\tilde{u}^{(k)}$, $\tilde{v}^{(k)}$, $\tilde{w}^{(k)}$ ищутся в виде:

$$\tilde{u}^{(k)} = H\cos m\pi\xi \sum_{i=-1}^{N+1} U^{(k)}(\varsigma) f_i(\eta),$$
$$\tilde{v}^{(k)} = H\sin m\pi\xi \sum_{i=-1}^{N+1} V^{(k)}(\varsigma) \varphi_i(\eta), \qquad (5)$$
$$\tilde{w}^{(k)} = H\sin m\pi\xi \sum_{i=-1}^{N+1} W^{(k)}(\varsigma) \psi_i(\eta),$$

где $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\zeta = z/H$ – безразмерные переменные; функции $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ и $W^{(k)}$ подлежат определению, а функции $f_i(\eta), \varphi_i(\eta), \psi_i(\eta)$ – линейные комбинации кубических сплайнов $B_{3,j}(\eta)$, подобранные таким образом, чтобы выполнялись условия при $\eta = 0$ и $\eta = 1$. Например, в случае жесткого закрепления при $\eta = 0$ и $\eta = 1$

$$f_i(\eta), = \varphi_i(\eta) = \psi_i(\eta) \quad (i = \overline{0, N}),$$
$$f_0(\eta) = -4B_{3,-1}(\eta) + B_{3,0}(\eta);$$
$$f_1(\eta) = -B_{3,-1}(\eta) + B_{3,1}(\eta);$$
$$f_i(\eta) = B_{3,i}(\eta), \ (i = \overline{2, N-2});$$
$$f_{N-1}(\eta) = -B_{3,N+1}(\eta) + B_{3,N-1}(\eta);$$
$$f_N(\eta) = -4B_{3,N+1}(\eta) + B_{3,N}(\eta).$$

Граничные условия при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, когда $\tilde{u}^{(k)}$, $\tilde{v}^{(k)}$ и $\tilde{w}^{(k)}$ определяются формулами (5), выполняются автоматически.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U^{(k)}$, $V^{(k)}$ и $W^{(k)}$ получается из уравнений (1) и (2) после перехода к безразмерным величинам и подстановки выражений (5) методами разделения переменных и сплайн-коллокации [2]. Граничные условия для этой системы следуют из условий (3) и (4), выполнение которых также требуется в точках коллокации. Задача решается численным методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Этот метод применялся для исследования напряженно-деформированного состояния изгиба двухслойных и трехслойных пластинок. В качестве материала слоев выбраны ортотропные стеклопластики типа СВАМ. В процессе вычислений для квадратных пластинок ($a = b = 1$ м) при различных значениях толщины H определены максимальные амплитуды прогиба при статическом изгибе и резонансные частоты в диапазоне $0 \le \omega \le 50000$ с$^{-1}$.

Список литературы

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: ГИТТЛ, 1957. 463 с.

2. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикл. механика. 1995. Т. 31, №6. С. 3–26.

THE STRESEDS-STRAINED STATE OF BENDING OF A MULTILAYERED PLATE WITH TWO SIMPLY-SUPPORTED OPPOSITE EDGES

A.V. Aristambekova

Bending and vibrations of a multilayered rectangular plate is considered. The plate is composed of N orthotropic layers of arbitrary thickness. Two opposite edges of the plate are simply supported. A numerical solution method is developed and implemented. The results are presented in a tabular form.

Keywords: orthotropic plate, bending, vibration, numerical solution, discrete orthogonalization.