

УДК 539.374

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ТЕЛ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ВИДУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

© 2011 г.

Е.В. Ломакин, Б.Н. Федулов

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

lomakin@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 15.06.2011

Процесс пластического деформирования многих материалов включает в себя не только механизм скольжения, но также развитие существующих и образование новых элементов несплошности материалов, перемещение и разрушение структурных элементов. Поведение неоднородностей при деформировании материалов определяется видом внешних воздействий, что проявляется в зависимости характеристик пластичности и прочности многих материалов от условия нагружения. На основе анализа экспериментальных исследований предложен возможный подход к описанию зависимости характеристик пластического деформирования сред от реализуемого при нагружении вида напряженного состояния. С помощью закона течения, ассоциированного с условием пластичности, представленном в соответствующем обобщенном виде, получены определяющие соотношения для описания пластического деформирования рассматриваемого класса сред. В рамках жесткопластической модели среды получены аналитические решения ряда краевых задач. Исследована зависимость распределения напряжений в пластических областях и величин предельных нагрузок от параметра, характеризующего чувствительность пластических свойств сред к виду напряженного состояния. На основе численного моделирования исследовано влияние упругих деформаций на форму пластических областей и величины предельных нагрузок. Проведены теоретические и экспериментальные исследования пластического деформирования пористого материала на основе стальной проволоки и продемонстрировано хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными зависимостями.

Ключевые слова: теория пластичности, предельная нагрузка, предельный анализ, чувствительность к виду напряженного состояния, численное моделирование, аналитическое решение, тип нагружения, экспериментальные исследования, среда с дефектами, пластическая деформация, модель материала, определяющие соотношения.

Для сред, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния, условие пластичности может быть представлено в следующем обобщенном виде:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \quad (1)$$

Здесь $\xi = \sigma/\sigma_0$ – параметр вида напряженного состояния, характеризующий в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в произвольной точке сплошной среды, $\sigma = 1/3\sigma_{ii}$ – среднее нормальное напряжение, $\sigma_0 = \sqrt{3/2S_{ij}S_{ij}}$ – интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$. Не нарушая общности, можно принять, что при чистом сдвиге ($\xi = 0$) значение $f(0) = 1$. Тогда $k = \sqrt{3}\tau_S$, где τ_S – предел текучести при сдвиге. При произвольном виде напряженного состояния параметр ξ принимает значения от $-\infty$ (равномерное трехосное сжатие) до ∞ (равномерное трехосное растяжение).

Принимая различные аналитические выражения для функции $f(\xi)$ в условии (1), можно получить некоторые из известных условий пластичности для гранулированных, пористых, поврежден-

ных и других неоднородных сред. Если принять функцию $f(\xi)$ в виде линейной функции

$$f(\xi) = 1 + C\xi, \quad (2)$$

то получим обобщенный критерий Кулона–Мора. Можно также получить условие пластичности Грина, если принять функцию $f(\xi)$ в виде

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}. \quad (3)$$

При $f(\xi) \equiv 1$ условие (1) совпадает с условием Губера – Мизеса, $\sigma_0 = k$.

На основе ассоциированного с условием (1) закона течения в случае жесткопластического тела получим связь между скоростями деформаций и напряжениями

$$\dot{\epsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij} = h' [1/3\Lambda(\xi)\delta_{ij} + \lambda(\xi)f(\xi)S_{ij}/k],$$

$$\Lambda(\xi) = f'(\xi), \lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

$$h' = \sqrt{(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}) / (1/3\Lambda^2(\xi) + 3/2\lambda^2(\xi))}.$$

Пластическое деформирование среды сопровождается в общем случае необратимым изменением объема, и скорость объемной деформации пропорциональна интенсивности скоростей де-

формации, но коэффициент пропорциональности зависит от параметра вида напряженного состояния ξ [1].

В случае плоской деформации все зависимости сводятся к функциям плоского аналога среднего напряжения $S = 1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, и формулы для напряжений могут быть представлены в виде $\sigma_{11} = S - kF(S)\sin 2\theta$, $\sigma_{22} = S + kF(S)\sin 2\theta$, $\sigma_{12} = kF(S)\cos 2\theta$.

Решение задач плоской деформации сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned} S_{,1} - kF'(S)(S_{,1}\sin 2\theta - S_{,2}\cos 2\theta) - \\ - 2kF(S)(\theta_{,1}\cos 2\theta + \theta_{,2}\sin 2\theta) = 0, \\ S_{,2} + kF'(S)(S_{,1}\cos 2\theta + S_{,2}\sin 2\theta) - \\ - 2kF(S)(\theta_{,1}\sin 2\theta - \theta_{,2}\cos 2\theta) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Определены характеристики системы уравнений (4). Для функций (2) и (3) соотношения вдоль характеристик могут быть проинтегрированы [2, 3].

В рамках жесткопластической модели с использованием условий пластичности (1)–(3) получены аналитические решения задач о растяжении полос с угловыми вырезами, на основе которых продемонстрирован подход, позволяющий определять значения предельной нагрузки и анализировать поля скоростей перемещений и напряжений в предельном состоянии с учетом чувствительности пластических свойств среды к виду напряженного состояния. Проведено также численное моделирование для данной задачи с использованием упругопластической модели с малым упрочнением. Значения предельной нагрузки в аналитических и численных решениях показаны на рис. 1 в зависимости от параметра C , характеризующего чувствительность пластических свойств сред к виду напряженного состояния.

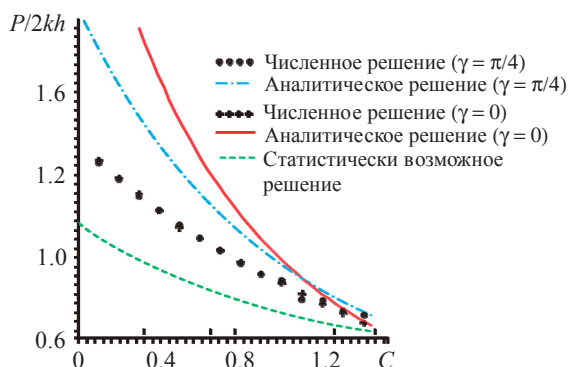


Рис. 1

Получено также аналитическое и численное решение задач о растяжении полос, ослабленных боковыми вырезами с круговым основанием. На

рис. 2 показаны соответствующие значения предельной нагрузки. Аналогичные зависимости получены для полос с круговыми отверстиями. Рассмотрены задачи о клине под действием одностороннего давления, о вдавливании жестких штампов в жесткопластическое основание.

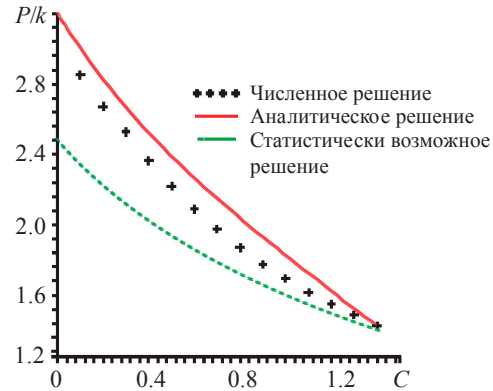


Рис. 2

Установлено, что учет упругих деформаций при расчетах изменяет кинематическую картину пластического деформирования и приводит к существенному изменению формы пластических областей по сравнению с аналитическими решениями в рамках жесткопластической модели. Величина предельной нагрузки существенно образом зависит от чувствительности пластических свойств материалов к виду напряженного состояния. При этом значения предельных нагрузок, определенные на основе упругопластической модели, находятся в интервале между верхней и нижней оценками, получаемыми из экстремальных теорем для кинематически возможного и статически допустимого коэффициентов предельной нагрузки.

Проведено экспериментальное исследование зависимости параметров условия пластичности (1) от пористости материала, изменяющейся в процессе нагружения. Эксперименты проводились на образцах прессованной стальной проволоки, которая часто используется в устройствах, применяемых для нефтедобычи. Наглядно продемонстрирована возможность учета изменения структурных параметров материала в рамках обобщенного условия пластичности (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00168).

Список литературы

1. Ломакин Е.В. // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. №6. С. 58–68.
2. Ломакин Е.В., Федулов Б.Н. // Вестник СамГУ.

Естественнонаучная серия. 2007. №(54). С. 263–279. Mechanics / Eds. N.K. Gupta, A.V. Manzhurov. New Delhi: 3. Lomakin E.V. // Topical Problems in Solid IIT Delhi, 2008. P. 122–132.

THEORY OF PLASTICITY AND LIMIT STATE OF SOLIDS SUSCEPTIBLE TO THE STRESS STATE TYPE

E.V. Lomakin, B.N. Fedulov

The process of plastic deformation of many materials could be governed not only by shear sliding but also by developing of present and creation of new elements of media discontinuity, migration and damage of structural elements. The behavior of discontinuities under material deformation depends on the type of external forces, which appears in the dependence of plasticity characteristics and strength capability of various materials on the loading conditions. Based on the experimental analysis, a possible approach to the description of the dependence of plastic deformation characteristics on the stress state type realized under loading is performed. By means of flow theory associated with plasticity condition, represented in corresponding generalized form, constitutive equations for plastic deformation of media under consideration are obtained. Based on the rigid-plastic media model, a number of solutions of boundary value problems are obtained. The dependence of stress distribution in plastic areas and the values of limit loads on the parameter which characterizes material stress state sensitivity are investigated. Using numerical modeling, the influence of elastic deformation on the shape of plasticity areas and on the limit loads is studied. Theoretical and experimental investigations of plastic deformations of pore material based on steel wire were done; a good correlation between theoretical and experimental dependencies is obtained.

Keywords: theory of plasticity, limit load, limit design, stress state type sensitivity, numerical modeling, analytical solution, solid analysis, type of loading, experimental studies, media with defects, plastic deformation, material model, constitutive equation.