УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ РАСТУЩИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

С.А. Лычев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

lychevsa@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследуется деформация растущих по толщине упругих пластин. Толщина пластины непрерывно увеличивается в результате присоединения материала к ее лицевым поверхностям. Поскольку пластина деформируется в процессе роста, ее напряженно-деформированное состояние зависит не только от нагружения, но и от истории процесса наращивания. Рассматривается наиболее простой режим наращивания, при котором толщина растущей пластины изменяется во времени, но постоянна относительно пространственных координат. Сформулированы уравнения равновесия относительно перемещений, а также относительно скоростей изменения перемещений для различных режимов наращивания. Рассмотрены соответствующие краевые задачи.

Ключевые слова: растущая пластина, непрерывное наращивание, сценарий наращивания, напряженно-деформированное состояние.

Пусть Π – плоскость осреднения, $\{y^1, y^2\}$ – криволинейные координаты на ней и $\mathbf{k}$ – единичный вектор, ортогональный к плоскости Π. Полагаем, что перемещения точек пластины подчиняются кинематическим гипотезам Кирхгофа–Лява, то есть

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} - z\nabla w, \quad w = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(y^1, y^2), \qquad (1)$$

где $\mathbf{a}$ – перемещения в плоскости пластины, w – прогибы. Символ ∇ определяет двухмерный оператор Гамильтона: $\nabla = \mathbf{e}^1\partial_1 + \mathbf{e}^2\partial_2$, $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$ – элементы контравариантного базиса, ∂_1, ∂_2 – частные производные по переменным y^1, y^2. Согласно гипотезам теории пластин типа Кирхгофа – Лява полагаем, что нормальные элементы не изменяют своей длины. Учитывая соотношения (1), получаем следующее выражение для деформаций:

$$\varepsilon_b = 1/2(\nabla\otimes\mathbf{a} + (\nabla\otimes\mathbf{a})^* - \mathbf{k}\otimes\nabla w - \nabla w\otimes\mathbf{k}) - z\nabla\otimes\nabla w.$$

Тензорное поле $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ определяет совместные деформации, возникающие в составе тела. Однако перед присоединением каждый элементарный слой деформируется независимо. Деформация слоя ζ непосредственно перед присоединением определяется двухмерным полем $\mathbf{d}_\zeta(y^1, y^2) = \mathbf{e}^\alpha d_\alpha(y^1, y^2)$. Полагаем, что «сборка» расслоения этих полей $\mathbf{d}(y^1, y^2, z) = \mathbf{d}_\zeta(y^1, y^2)|_{\zeta=z}$ представляет собой гладкое трехмерное многообразие. Это означает, что все параметры, определяющие процесс наращивания, являются гладкими функциями времени. Таким образом, послойные («сборочные») деформации могут быть определены формулой

$$\varepsilon_f = 1/2(\nabla\otimes\mathbf{d} + (\nabla\otimes\mathbf{d})^*),$$

а полные деформации расслоения задаются соотношением $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_b + \mathrm{I}n\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_f\cdot\mathrm{I}n$. Здесь $\mathrm{I}n$ – оператор вложения двухмерного тензорного поля в трехмерное евклидово пространство. Следует отметить, что полные деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, вообще говоря, не удовлетворяют условиям совместности, т.е.

$$\nabla\times(\nabla\times\varepsilon)^* \neq 0, \quad \nabla = \nabla\mathbf{k} + \partial_z.$$

Полагаем, что материал растущей пластины упругий и подчиняется закону Гука. Тогда напряжения в текущей конфигурации могут быть представлены следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla\otimes\mathbf{a} + (\nabla\otimes\mathbf{a})^* - \mathbf{k}\otimes\nabla w - \nabla w\otimes\mathbf{k} - z\nabla\otimes\nabla w + \nabla\otimes\mathbf{d} + (\nabla\otimes\mathbf{d})^*) + \lambda\mathbf{I}(\nabla\cdot\mathbf{a} - z\nabla^2 w + \nabla\cdot\mathbf{d}).$$

Здесь λ, μ – упругие модули Ламе. Напряжения в отсчетной конфигурации задаются соотношением

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu(\nabla\otimes\mathbf{d} + (\nabla\otimes\mathbf{d})^*) + \lambda\mathbf{I}(\nabla\cdot\mathbf{d}).$$

Заметим, что в силу несовместности полных деформаций не существует никакой гладкой деформации текущей конфигурации в натуральную, т.е. свободную от напряжений конфигурацию.

Осреднение по толщине приводит к следующим выражениям для усилий и моментов в растущей пластине:

$$\mathbf{N} = 2\mu\left[(h_+ + h_-)\mathbf{defa} - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla\otimes\nabla w\right] + $$
$$+\lambda\mathbf{I}\left[(h_+ + h_-)\nabla\cdot\mathbf{a} - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla^2 w\right] +$$
$$+\int_{-h_-}^{h_+}(2\mu\mathbf{defd} + \lambda\mathbf{I}\nabla\mathbf{d})dz, \qquad (2)$$

$$\mathbf{M} = -2\mu\left[\frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\nabla\otimes\nabla w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla\otimes\mathbf{a}\right] -$$
$$-\lambda\mathbf{I}\left[\frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\nabla^2 w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla^2\cdot\mathbf{a}\right] +$$
$$+\int_{-h_-}^{h_+}(2\mu\mathbf{defd} + \lambda\mathbf{I}\nabla\mathbf{d})zdz, \qquad (3)$$

В отличие от классической теории пластин эти соотношения содержат дополнительные члены, возникающие в силу общего положения плоскости осреднения П и несогласованных начальных деформаций элементарных слоев. Соответствующие выражения для перерезывающих сил имеют вид:

$$\mathbf{Q} = -(2\mu+\lambda)\frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\nabla\otimes\nabla^2 w +$$
$$+\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}[(\mu+\lambda)\nabla\otimes\nabla\cdot\mathbf{a} + \mu\nabla^2\mathbf{a}] +$$
$$+\int_{-h_-}^{h_+}[(\lambda+\mu)\nabla\otimes\nabla\cdot\mathbf{d} + \mu\nabla^2\mathbf{d}]dz. \qquad (4)$$

Обозначим символом **K** осреднение внешних сил, действующих на пластину. С учетом соотношений (2), (3), (4) уравнения равновесия могут быть записаны в следующей векторной форме:

$$(h_- + h_+)[\mu\nabla^2\mathbf{a} + (\lambda+\mu)\nabla\otimes\nabla\cdot\mathbf{a}] - (\lambda+2\mu)\times$$
$$\times\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla\otimes\nabla^2 w + (\lambda+2\mu)\left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{a} -\right.$$
$$\left.-\frac{h_+^3 + h_-^3}{3}\nabla^2\nabla^2 w\right]\otimes k + \mathbf{K} + \int_{-h_-}^{h_+}(\mu\nabla^2\mathbf{d} +$$
$$+(\lambda+\mu)\nabla\otimes\nabla\cdot\mathbf{d})dz + \mathbf{k}(\lambda+2\mu)\int_{-h_-}^{h_+}(\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{d})zdz = \mathbf{0}.$$

Ортогональная проекция этого уравнения на плоскость П дает

$$(h_- + h_+)[\mu\nabla\mathbf{a} + (\lambda+\mu)\nabla\otimes\nabla\cdot\mathbf{a}] -$$
$$-(\lambda+2\mu)\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla\nabla^2 w + \mathbf{K}_\Pi +$$
$$+\int_{-h_-}^{h_+}(\mu\nabla^2\mathbf{d} + (\lambda+\mu)\nabla\otimes\nabla\cdot\mathbf{d})dz = \mathbf{0}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\Pi + q\mathbf{k}$, $q = \mathbf{K}\cdot\mathbf{k}$. Проекция на вектор $\mathbf{k} \perp \Pi$ приводит к следующему уравнению

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2}\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{a} - \frac{h_+^3 - h_-^3}{3}\nabla^2\nabla^2 w\right] +$$
$$+q + (\lambda+2\mu)\int_{-h_-}^{h_+}(\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{d})zdz = 0. \qquad (6)$$

Из уравнения (5) выразим $\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{a}$ и подставим результат в уравнение (6). Имеем:

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q + (\lambda+2\mu)\times$$
$$\times\int_{-h_-}^{h_+}\left[\left(z - \frac{h_+ - h_-}{2}\right)\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{d}\right]dz - \frac{h_+ - h_-}{2}\nabla\cdot\mathbf{K}_\Pi, \qquad (7)$$

где D – цилиндрическая жесткость:

$$D = (\lambda + 2\mu)h^3/12,\ h = h_- + h_+.$$

Уравнение (7) определяет равновесие текущей конфигурации. Это уравнение совместно с соответствующими краевыми условиями формирует краевую задачу для растущей по толщине пластины.

В некоторых случаях формулировка краевой задачи в терминах скоростей оказывается более удобной для решения. Для того, чтобы получить уравнение относительно скоростей изменения прогибов, продифференцируем уравнение (7) по времени:

$$\dot{D}\nabla^2\nabla^2 w + D\nabla^2\nabla^2\dot{w} = \dot{q} + (\lambda+2\mu)\times$$
$$\times\left[\frac{h}{2}\left(\dot{h}_+\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{d}\big|_{z=h_+} - \dot{h}_-\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{d}\big|_{z=-h_-}\right) -\right.$$
$$\left.-\int_{-h_-}^{h_+}\left(\frac{\dot{h}_+ - \dot{h}_-}{2}\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{d}\right)dz\right] -$$
$$-\frac{\dot{h}_+ - \dot{h}_-}{2}\nabla\cdot\mathbf{K}_\Pi - \frac{h_+ - h_-}{2}\nabla\cdot\mathbf{K}_\Pi,$$
$$\dot{D} = (\lambda+2\mu)\frac{h^2\dot{h}}{4}.$$

Если процесс наращивания симметричен, т.е. для любого момента времени $h_+ = h_- = h/2$, то уравнение (7) может быть записано в форме

$$D\nabla^2\nabla^2 w = q + (\lambda+2\mu)\int_{-h/2}^{h/2}(\nabla^2\nabla\cdot\mathbf{d})zdz.$$

Дифференцирование этого уравнения по времени приводит к соотношению:

$$\dot{D}\nabla^2\nabla^2 w + D\nabla^2\nabla^2\dot{w} = \dot{q} +$$

$$+(\lambda+2\mu)\frac{h\dot{h}}{4}\nabla^2\nabla\cdot(\mathbf{d}\big|_{z=h/2}-\mathbf{d}\big|_{z=-h/2}),$$

Если присоединяются слои, свободные от напряжений, то

$$\mathbf{d}\big|_{z=-h/2}=-h/2\nabla w,\ \ \mathbf{d}\big|_{z=h/2}=h/2\nabla w\ .$$

Приходим к уравнению для частного случая симметричного наращивания ненапряженными слоями:

$$D\nabla^2\nabla^2\dot{w}=\dot{q}. \tag{8}$$

Заметим, что уравнение (8) соответствует классическому уравнению Софи Жермен, если в последнем осуществить формальную замену $w\to\dot{w}$, $q\to\dot{q}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №11-01-00669, 09-08-01194-а, 09-08-01180-а), Программой №13 ОЭММПУ РАН и грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-3288.2010.1.

Список литературы

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Институт механики НАН РА, 1999. 320 с.

2. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д. Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.

3. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Finite deformations of accreted solids // Proc.of XXXVIII Summer School-Conference APM2010. St.-Petersburg, 2010. P. 444–452.

DEFORMATION OF TRANSVERSALLY ACCRETED PLATES

S.A. Lychev

The transversally accreted plates are characterized by the continuous adherence of material particles to its facial surface. Since the plate bends during the accretion, its stressed-strained state depends not only on loading, but also on the history of the process of accretion, i.e. the schedule of accretion. A schedule of elementary type, when during every infinitesimal time interval the particles of adhered material constitute the layer of constant infinitesimal thickness, is considered. The equations of motion in terms of displacements and in terms or velocities are derived. The corresponding boundary value problems are considered.

Keywords: transversally accreted plates, continuous adherence, schedule of accretion, stress-strain state.