Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1594–1596

УДК 531+532.1+534.2

ДИССИПАТИВНЫЙ КОНТИНУУМ КОССЕРА. СДВИГОВАЯ ВЯЗКОСТЬ КАК СЛЕДСТВИЕ РЕЛАКСАЦИИ УГЛОВОГО МОМЕНТА ПРИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ

Г.А. Максимов, В.А. Ларичев

Акустический институт им. Н.Н. Андреева, Москва

gamaximov@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

На основе обобщенного вариационного принципа для диссипативной механики сплошной среды показано, что слагаемое со сдвиговой вязкостью в уравнении Навье – Стокса может быть интерпретировано как следствие релаксации углового момента материальных точек, составляющих сплошную среду. Вращательная степень свободы материальных точек как независимая переменная появляется в дополнение к полю средних массовых смещений. Этой степени свободы соответствует независимое уравнение движения для поля микровращений. Для бездиссипативного случая такой подход приводит к хорошо известному континууму Коссера. Когда же диссипация превалирует над инерцией, этот подход описывает локальную релаксацию углового момента, которая и появляется в виде слагаемого со сдвиговой вязкостью в уравнении Навье – Стокса.

Ключевые слова: вариационный принцип, диссипация, сдвиговая вязкость, континуум Коссера.

В [1, 2] был сформулирован обобщенный вариационный принцип (ОВП) для диссипативной механики сплошной среды, который объединил вариационный принцип Гамильтона для бездиссипативных механических систем с вариационным принципом Онсагера для диссипативных термодинамических систем. Функция Лагранжа L в ОВП строится в виде разности кинетической K и свободной F энергий, а также интеграла по времени от диссипативной функции D

$$L = K - F - \int_0^t D dt'.$$

При этом в качестве независимых переменных выступают поля массовых $\mathbf{u}$ и тепловых $\mathbf{u}_T$ смещений, где последние определяются соотношением $\mathrm{div}\mathbf{u}_T = (T - T_0)/T_0$, где T и T_0 – соответственно текущая и равновесная температуры. Наличие двух указанных полей обеспечивает консервативность полной системы при наличии диссипации, которая приводит к тому, что механическая энергия переходит в тепловую. Как показано в [1, 2], на основе ОВП можно получить систему уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости в форме Навье–Стокса. При этом, однако, для учета слагаемых, ответственных за вязкость жидкости, приходится в соответствии с подходом Мандельштама–Леонтовича [3] вводить некий внутренний параметр тензорного типа, релаксация которого и обеспечивает появление слагаемых с вязкостью. Следует отметить, что этот подход позволил обобщить уравнение Навье–Стокса, в котором вязкость является константой, на более общий случай, учитывающий релаксацию вязкости, аналогичную модели Максвелла [4]. Вместе с тем, физическая интерпретация тензорного внутреннего параметра, которая должна быть в достаточной мере универсальной ввиду общего характера уравнения Навье – Стокса, требует более ясного понимания. На интуитивном уровне понятно, что соответствующий внутренний параметр как-то должен быть связан с ближним порядком расположения атомов и молекул и его релаксацией. В настоящем исследовании предложена такая физическая интерпретация.

Уравнения гидродинамики в форме Навье–Стокса обычно выводятся [5] на основе законов сохранения массы M, импульса $\mathbf{P}$ и энергии E. При этом справедливость традиционной системы гидродинамических уравнений подтверждается огромным количеством экспериментов, для которых оно адекватно. Вместе с тем, среди перечисленных законов сохранения, на которых основана традиционная гидродинамика [5], отсутствует закон сохранения момента импульса $\mathbf{M}$. В этой связи представляет интерес разобраться с ролью закона сохранения углового момента при гидродинамическом описании.

На необходимость учета закона сохранения углового момента при гидродинамическом описании обращалось внимание и раньше [6, 7]. Нужно также отметить, что уравнение для углового момента возникает и разрабатывается в моментной теории упругости. Примером описания является континуум Коссера [8–10]. Однако для такого подхода требуется внутренняя микроструктура среды [8].

В настоящем исследовании учет углового момента проводится на основе ОВП. При гидродинамическом описании, как частном случае механики сплошной среды, вводится понятие материальной точки как достаточно большого ансамбля структурных элементов среды (атомов и молекул), такого, что свойства этого ансамбля можно описывать статистически. С другой стороны, размер материальной точки должен быть мал по сравнению с характерными размерами задачи. При этом отдельная материальная точка как замкнутый ансамбль частиц обладает следующими интегралами движения: массой M, импульсом $\mathbf{P}$, энергией E и моментом импульса $\mathbf{M}$.

Основными независимыми переменными, в терминах которых проводится построение механики сплошной среды, являются величины, определяемые для отдельной материальной точки в соответствии с ее интегралами движения: средний массовый вектор смещения $\mathbf{u}$ (скорость этого смещения $\mathbf{v} = \partial\mathbf{u}/\partial t$ определяется интегралами движения $\mathbf{v} = \mathbf{P}/M$), угол поворота φ (угловая скорость вращения $\mathbf{\Omega} = \dot{\varphi}$ определяется интегралами движения $\mathbf{\Omega} = = \mathbf{M}/I$, где I – момент инерции) и тепловым смещением $\mathbf{u}_T$, определяющим изменение температуры и связанным с интегралом энергии [1, 2].

В соответствии с набором независимых полевых переменных запишем кинетическую K, свободную F энергии и диссипативную функции D в виде соответствующих квадратичных форм:

$$2K = \rho\dot{\mathbf{u}}^2 + I\dot{\varphi}^2, \tag{1}$$

$$2D = \beta\dot{\varphi}^2, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 2F &= (\lambda + 2\mu)(\nabla\mathbf{u})^2 + \mu[\nabla\mathbf{u}]^2 + \\ &+ 2\delta\varphi[\nabla\mathbf{u}] + \sigma(\varphi)^2 + \varepsilon(\nabla\varphi)^2 + \varsigma[\nabla\varphi]^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что кинетическая энергия представлена как сумма кинетических энергий поступательного и вращательного движений. Два первых слагаемых в квадратичной форме для свободной энергии F соответствуют ее обычному представлению в теории упругости [4], а остальные слагаемые описывают вклад, связанный с полем микровращений. При этом за взаимодействие поля массовых смещений и поля микровращений отвечает слагаемое с коэффициентом δ.

Уравнения движения, следующие из ОВП с квадратичными формами (1)–(3), в отсутствии диссипации $\delta = 0$ соответствуют уравнениям движения континуума Коссера – упругой среды с внутренними поворотами [8–10]. При наличии диссипации, связанной с релаксацией поля микровращений, даже в отсутствие у этого поля инерции $I = 0$, удается получить уравнение движения, аналогичное уравнению Навье–Стокса. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что именно релаксация поля микровращений является физической причиной появления вязкостных слагаемых в уравнении Навье–Стокса. Одновременно отсутствие ограничения на минимальный момент инерции и на связанный с ним минимальный размер материальной точки позволяет рассматривать гидродинамику как частный случай диссипативного континуума Коссера. Действительно, в этом случае минимальный размер материальной точки может быть доведен до длины свободного пробега атомов или молекул, совпадающей с ограничением на гидродинамическое описание.

В заключение отметим, что на основе ОВП может быть получена система уравнений движения поля массовых смещений и поля микровращений, описывающая релаксацию собственного углового момента материальных точек, составляющих сплошную среду. При этом локальную релаксацию поля микровращений можно рассматривать как физическую причину возникновения слагаемых со сдвиговой вязкостью в уравнении Навье–Стокса. При отсутствии диссипации углового момента полученная система уравнений сводится к хорошо известной модели континуума Коссера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-02-00927_а.

Список литературы

1. Maximov G.A. New Research in Acoustics / Ed. B.N. Weis. Nova Science Publisher, 2008. P. 21–61.

2. Максимов Г.А. // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, №4. С. 92–104.

3. Мандельштам Л.И., Леонтович М.А. // ЖЭТФ. 1937. Т. 7, №3. С. 438–444.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Теория упругости. М.: Наука, 1987. Т. VII.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. Т. VI.

6. Сорокин В.С. // ЖЭТФ. 1943. Т. 13. Вып. 7-8. С. 306–312.

7. Шлиомис М.И. // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. Вып. 7. С. 258–265.

8. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975.

9. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

10. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: МГУ, 1998.

COSSERAT DISSIPATIVE CONTINUUM. SHEAR VISCOSITY AS A RESULT OF ANGULAR MOMENTUM RELAXATION IN HYDRODYNAMIC DESCRIPTION

G.A. Maximov, V.A. Larichev

Basing on the generalized variational principle for dissipative continuum mechanics it is shown that the term with shear viscosity in Navier–Stokes equation can be interpreted as a result of relaxation of angular momentum of material points consisting continuum. The rotation degree of freedom as an independent variable appears in addition to the mean displacement field. The independent equation of motion for the micro rotation field corresponds to this additional degree of freedom. In the absence of dissipation, this approach leads to the well known Cosserat continuum. When dissipation dominates over inertia, this approach describes local relaxation of angular momentum that appears as a shear viscosity term in Navier–Stokes equation.

Keywords: variational principle, dissipation, shear viscosity, Cosserat continuum.