

УДК 539.3

МАГНИТОУПРУГИЙ СОЛИТОН ДЕФОРМАЦИИ В СТЕРЖНЕ

© 2011 г.

А.О. Мальханов

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

alexey.malkhanov@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена возможность формирования магнитоупругого солитона деформации в идеально проводящем стержне. Изучены зависимости параметров солитона (амплитуда, скорость, ширина) от напряженности и ориентации внешнего постоянного магнитного поля, показывающие, что с его помощью можно управлять характеристиками солитона.

Ключевые слова: магнитоупругость, солитон, магнитное поле.

Нелинейные искажения, возникающие при распространении интенсивных упругих волн в элементах конструкций, могут накапливаться с течением времени и при определенных условиях приведут к сильному укручению волновых фронтов. Это, в свою очередь, может вызвать появление больших напряжений, необратимых деформаций в материале и привести к локальной потере устойчивости. С одной стороны, эффекты формирования нелинейных волн с большими градиентами напряжений и деформаций оказываются нежелательными, поскольку могут приводить к разрушению или пластическому течению материала, но, с другой стороны, они могут быть полезными и найти применение в технологиях обработки материалов, в дефектоскопии и технической диагностике.

Рассмотрим однородный, идеально проводящий стержень, находящийся во внешнем магнитном поле с напряженностью H_0 , ортогонально ориентированном к направлению распространения продольной волны в стержне. Суммарное магнитное поле состоит из его постоянного значения и возмущений, появляющихся в результате взаимодействия с полем деформаций

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{n} + \mathbf{h}, \quad (1)$$

где \mathbf{n} – вектор нормали, \mathbf{h} – малое возмущение магнитного поля.

Система уравнений магнитоупругости для модели, описывающей продольные колебания идеально проводящего стержня (в этом случае преобладает продольная компонента вектора перемещений u_x) и учитывающей как кинетическую энергию толщинных колебаний, так и потенциальную энергию сдвиговых деформаций, имеет вид [1]:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} - c_0^2 \left(1 + \frac{6\alpha_1}{E} Q \right) \frac{\partial Q}{\partial \tilde{x}} - v^2 R^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left(\frac{\partial G}{\partial \tau} - c_\tau^2 \frac{\partial Q}{\partial \tilde{x}} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (H_0 + h_z) \frac{\partial h_z}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad (2)$$

$\frac{\partial Q}{\partial \tau} - \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}} = 0$, $\frac{\partial h_z}{\partial \tau} + (H_0 + h_z) \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}} + G \frac{\partial h_z}{\partial \tilde{x}} = 0$.
Здесь τ – время, \tilde{x} – продольная координата, $G = \partial u_{\tilde{x}} / \partial \tau$, $Q = \partial u_{\tilde{x}} / \partial \tilde{x}$, v – коэффициент Пуассона, $R = \sqrt{J_0 / F}$ – полярный радиус инерции, $J_0 = \iint_F (y^2 + z^2) dF$ – полярный момент инерции, F – площадь поперечного сечения стержня, $E = \mu(3\lambda + 2\mu) / (\lambda + \mu)$ – модуль Юнга, $\alpha_1 = E/2 + 3\lambda/2 + A + B(1 - 2\nu) + C/3(1 - 6\nu)$ – коэффициент упругой нелинейности, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольной волны, $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой волны, c – скорость света в вакууме.

Перейдем в системе (2) к безразмерным переменным и введем движущуюся систему координат

$$U = Q, \quad V = \frac{G}{c_0}, \quad W = \frac{h_z}{H_0}, \quad \tilde{x}_1 = \frac{1}{vR} \tilde{x}, \quad (3)$$

$$\tilde{\tau} = \frac{c_0}{vR} \tau, \quad x = \tilde{x}_1 - V_p \tilde{\tau}, \quad t = \varepsilon \tilde{\tau},$$

где V_p – характерная скорость волн, заранее неизвестная; ε – малый параметр.

Подставляя (3) в систему (2), сохраняя при этом члены с ε в степени, не выше первой, приходим к эволюционному уравнению относительно продольной деформации

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{c_A^2/c_0^2 - 6\alpha_1/E + 2V_p}{1 + V_p}, \quad \beta = \frac{V_p^2 - c_\tau^2/c_0^2}{1 + V_p},$$

$V_p = \sqrt{1 + c_A^2/c_0^2}$, $c_A = \sqrt{H_0^2/4\pi\rho}$ – скорость волны Альфвена [2].

Уравнение (4) представляет собой уравнение Кортевега – де Вриза, которое имеет локализованное решение в виде солитона отрицательной полярности:

$$U = -\frac{A}{\text{ch}^2(\xi/\Delta)}, \quad \xi = x - V_s t, \quad (5)$$

$$A = \frac{3V_s}{\alpha}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{12\beta}{A\alpha}}.$$

Профиль солитона изображен на рис. 1. Зависимости амплитуды солитона (A), его скорости (V_s) и ширины (Δ) от напряженности магнитного поля в случае, когда магнитное поле ориентировано перпендикулярно направлению распространения волны, показаны на рис. 2.

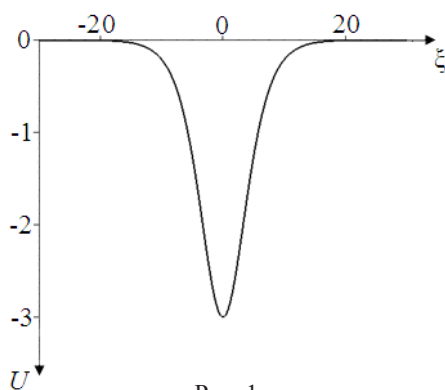


Рис. 1

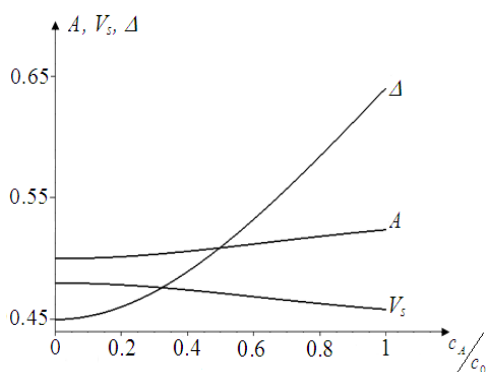


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что с ростом напряженности амплитуда (при постоянной скорости) солитона возрастает, в то время как его скорость (при постоянной амплитуде) убывает. Ширина солитона с ростом напряженности магнитного поля возрастает.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле име-

ет произвольную ориентацию к направлению распространения волны, задаваемую углом $0 \leq \varphi < 2\pi$. Повторяя рассуждения, сделанные для случая ортогональной ориентации поля, приходим к уравнению (4), коэффициенты которого помимо напряженности магнитного поля будут зависеть еще и от угла ориентации. Зависимости параметров солитона от ориентации внешнего магнитного поля представлены на рис. 3–5.

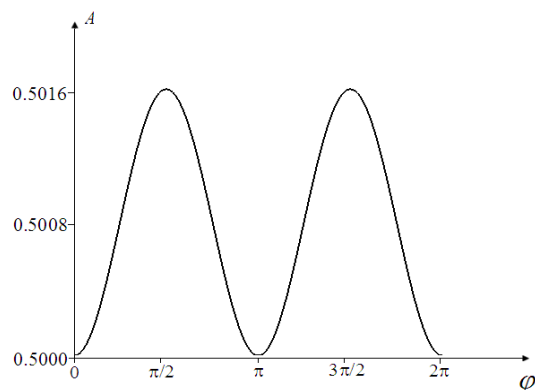


Рис. 3

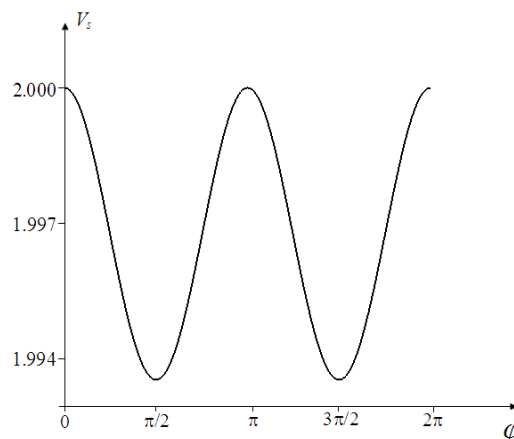


Рис. 4

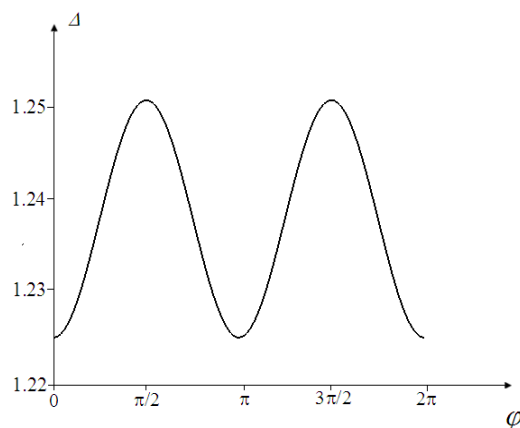


Рис. 5

Из рисунков видно, что амплитуда и ширина

максимальны, когда внешнее магнитное поле перпендикулярно направлению распространения солитона, и минимальны, когда поле параллельно направлению распространения волны. Скорость, наоборот, максимальна при параллельной ориентации и минимальна при ортогональной ориентации внешнего поля к направлению распространения волны.

Показана возможность формирования магнитупругого солитона деформации и установлены зависимости волновых параметров (амплитуда, скорость, ширина) от величины и пространственной ориентации внешнего магнитного поля, показывающие, что с помощью магнитного поля мож-

но управлять характеристиками локализованных волн.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-08-00827.

Список литературы

1. Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние магнитного поля на локализацию волны деформации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №1. С. 95–100.
2. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наук. думка, 1991. 200 с.

MAGNETOELASTIC DEFORMATION SOLITON IN A ROD

A.O. Malkhanov

The possibility of the formation of a magnetoelastic deformation soliton in a perfectly conducting rod is considered. The dependence of the soliton parameters (amplitude, velocity, width) on the strength and orientation of the external magnetic field has been studied. The results show that a magnetic field can be used to control the characteristics of the soliton.

Keywords: magnetoelasticity, soliton, magnetic field.