

УДК 539.3

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСТУЩИХ ТЕЛ: УРАВНЕНИЯ, ЗАДАЧИ, ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2011 г.

*А.В. Манжиров*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

manzh@inbox.ru

*Поступила в редакцию 15.06.2011*

Рассматриваются основные положения математической теории наращиваемых тел. В качестве ее фундамента используется теория расслоений дифференцируемых многообразий. Приводится классификация возможных способов наращивания деформируемых тел в зависимости от размерности элементов расслоений (или размерности базы расслоений). Подробно исследуется вариант наращивания трехмерного тела двухмерными поверхностями [1–4]. Представлена основная система уравнений, а также краевые и дополнительные условия рассматриваемого варианта роста деформируемого твердого тела, которые принципиально отличаются от уравнений и условий, справедливых для классического случая. Обсуждаются особенности предлагаемой математической теории, в частности ее геометрические аспекты.

*Ключевые слова:* растущее тело, расслоение многообразия, новые механические эффекты, геометрические аспекты, пространства с кривизной и кручением, аккреция гравитирующих объектов, разнообразные приложения.

Даны постановки краевых задач наращивания пространственного тела двухмерными поверхностями. В отличие от задач для тел постоянного состава они содержат тензорное поле дисторсии, которое может быть найдено из дополнительных условий, определяемых параметрами наращивания тела. Простейшим условием такого рода является заданный поверхностный тензор натяжения присоединяемой материальной поверхности [5]. В общем случае, если наращивание происходит за счет непрерывного присоединения напряженных материальных поверхностей, то в качестве таких условий могут быть использованы уравнения равновесия границы роста, рассматриваемой как деформируемая материальная поверхность, контактирующая с деформируемым трехмерным телом.

Представлена основная система уравнений, а также краевые и дополнительные условия рассматриваемого варианта роста деформируемого твердого тела, которые принципиально отличаются от уравнений и условий, справедливых для классического случая.

Обсуждаются особенности предлагаемой математической теории, в частности ее геометрические аспекты. Так, установлено, что растущее тело, вообще говоря, не имеет естественной (свободной от напряжений) конфигурации, погружаемой в трехмерное евклидово пространство; однако таковая имеется в трехмерном пространстве

с неевклидовой аффинной связностью. Соответствующий тензор кручения является мерой несовместности деформаций растущего тела. Показана связь особенностей нетривиальной геометрии натуральной отсчетной конфигурации с распределением остаточных напряжений в растущих телах.

Важно, что растущие тела могут быть рассмотрены как частный класс неоднородных (inhomogeneous) тел [6], в которых неоднородность возникает в силу неголомомной дисторсии, вызванной соединением несогласованно напряженных элементов. С этой точки зрения механика растущих тел имеет много общего с теорией дефектов, в частности с геометрической теорией непрерывно распределенных дислокаций, построенной во второй половине XX века. Следует отметить, что на развитие этой теории значительное влияние оказали методы геометрической теории гравитации Эйнштейна–Картана и общей теории относительности [7]. По-видимому, первым, кто применил методы геометрии Картана в механике сплошной среды, был К. Kondo. Эти идеи быстро получили развитие в серии работ Bilby et al., E. Kroner и A. Seeger, в которых были установлены связи между тензорным полем несовместности деформаций, плотностью распределения дефектов и нетривиальной геометрией материального многообразия с отличными от нуля кручением и кривизной. В этой связи такие гео-

метрические понятия, как связность, кривизна, кручение, параллелизм, оказались в числе основных понятий общей теории неоднородных тел, которая в логически завершённом виде была представлена в [8–10].

При непрерывном наращивании имеет место непрерывный приток материала к исследуемому телу. В этом случае процесс наращивания может быть представлен как последовательность элементарных актов присоединения бесконечно малых (инфинитезимальных) напряженных частей к растущему телу, причем каждый элементарный акт происходит за бесконечно малый интервал времени.

При поверхностном наращивании присоединение материала происходит на границе тела, которая называется границей роста. Поверхностному росту соответствуют такие технологические и природные процессы, как намотка, пиролитическое и электролитическое осаждение, возведение массивных сооружений, аккреция космических объектов, рост кристаллов.

Рост рассматривается как объединение деформированных тел, конфигурации которых не проникают друг в друга, но имеют в физическом пространстве общую границу. С механической точки зрения объединение по границе сводится к установке связей между граничными точками, которые в момент объединения занимали одно и то же место в физическом пространстве. В общем случае напряженно-деформированные состояния этих тел не согласованы, в связи с чем у их объединения отсутствует естественная отсчетная конфигурация. Следует отметить, что этот факт упоминался в работах по механике растущих тел, однако чаще указывалось лишь на несовместность поля малых деформаций [11–23].

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Непрерывное наращивание рассматривается как процесс непрерывного присоединения к телу инфинитезимальных областей, т.е. областей инфинитезимальной меры. В качестве меры используется мера массы. Таким образом, к инфинитезимальным областям могут быть причислены, например, бесконечно тонкие слои, нити, точки. Так как такие инфинитезимальные области представляют собой непрерывные тела различных размерностей, то они могут переносить напряженно-деформированное состояние, соответствующее их размерности; например, слои могут переносить мембранные напряжения, нити – линейное и т.д. Характер распределения напряжений в непрерывно растущем теле зависит от геометрического класса присоединяемых инфинитезимальных областей, что подразумевает построение раз-

личных вариантов теории наращивания.

Даны постановки краевых задач наращивания пространственного тела двумерными поверхностями. Представлена основная система уравнений, а также краевые и дополнительные условия рассматриваемого варианта роста деформируемого твердого тела, которые принципиальным образом отличаются от уравнений и условий, справедливых для классического случая тела постоянного состава.

Приведены расчеты ряда модельных задач, демонстрирующие целый ряд новых механических эффектов, которые возникают только в растущих телах. Обсуждаются обширные приложения теории для описания технологических процессов и природных явлений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №11-01-00669, 10-01-92653, 11-08-93967), Программой №13 ОЭМПУ РАН и грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-3288.2010.1.*

#### Список литературы

1. Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XIV Междунар. конф. Ростов-на-Дону, Азов, 19–24 июня 2010 г. Т. 1. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. С. 215–219.
2. Манжиров А.В. Основы математической теории растущих тел // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике: Тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 110-летию акад. М.А. Лаврентьева. Новосибирск: Институт гидродинамики СО РАН, 2010. С. 130–131.
3. Manzhirov A.V., Lychev S.A. Finite deformations of accreted solids // Proc. of XXXVIII Summer School-Conference APM2010. St.-Petersburg, 2010. P. 444–452.
4. Манжиров А.В., Лычев С. А. Модели растущих объектов в биомеханике // Биомеханика 2010: Тез. докл. X Всерос. конф. по биомеханике. Саратов, 16–22 мая 2010. Саратов: Изд-во СГУ, 2010.
5. Gurtin M.E.; Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces. Arch. Rational Mech. Anal. 1975. Vol. 57. P. 291–323.
6. Maugin G.A. Material inhomogeneities in elasticity. London: Chapman and Hall, 1993. 294 p.
7. Карган Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во КГУ, 1962. 210 с.
8. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. No 2. P. 1–32.
9. Wang C.C. On the geometric structure of simple bodies, or mathematical foundations for the theory of continuous distributions of dislocations // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. No 27. P. 33–94.
10. Epstein M, Maugin G.A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // International

Journal of Plasticity. 2000. V. 16, No 7. P. 951–978.

11. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В., Наумов В.Э. Контактные задачи механики растущих тел. М.: Наука, 1991. 175 с.

12. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: Ин-т механики НАН РА, 1999. 320 с.

13. Тринчер В.К. Расчет наращиваемых тел. М.: Изд-во МГУ, 1989. 154 с.

14. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. М.: Наука, 1987. 471 с.

15. Jon Kadish, J.R. Barber, P.D. Washabaugh Stresses in rotating spheres grown by accretion // International Journal of Solids and Structures. 2005. No 42. P. 5322–5334.

16. Манжиров А.В. О кручении растущего цилиндра жестким штампом // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 842–850.

17. Манжиров А.В., Черныш В.А. Задача об усилении заглубленной арочной конструкции методом наращивания // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 5. С. 25–37.

18. Манжиров А.В. Общая безынерционная начально-краевая задача для кусочно непрерывно нара-

щиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.

19. Манжиров А.В. Контактные задачи механики наращиваемых тел. В кн.: Механика контактных взаимодействий / Под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. С. 607–621.

20. Манжиров А.В., Михин М.Н. Плоская задача для растущего тела // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. VI Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 19–23 июня 2000 г. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. Т. 2. С. 106–109.

21. Манжиров А.В., Михин М.Н. Методы теории функций комплексного переменного, в механике растущих тел // Вестник СамГУ. Естественная серия. 2004. №4(34). С. 82–98.

22. Манжиров А.В., Михин М.Н. О кручении растущих тел // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. IX Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рождения акад. РАН И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. С. 131–136.

23. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. №1. С. 66–83.

#### MATHEMATICAL THEORY OF GROWING SOLIDS: EQUATIONS, PROBLEMS AND APPLICATIONS

*A.V. Manzhairov*

Fundamentals of the mathematical theory of growing solids are under consideration. The theory of fiber bundles of differentiable manifolds is taken as its foundation. Classification of the possible ways of solids accretion depending on the dimension of fiber (or dimension of fiber bundle base) is given. Accretion of 3D solids by 2D surfaces is under detailed investigation. The basic system of equations as well as the boundary and complimentary conditions of the considered process of solid accretion are presented. They fundamentally differ from the equations and conditions of the classical case. The specific features of the proposed mathematical theory, in particular, its geometric aspects are discussed.

*Keywords:* growing solid, fiber bundle of manifold, new mechanical effects, geometric aspects, spaces with curvature and torsion, accretion of gravitating objects, variety of applications.