Механика деформируемого твердого тела
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1606–1607

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА ПО ГРАНИЦЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.В. Марк

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

A-V-Mark@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена контактная задача о взаимодействии плоского штампа с вязкоупругой полуплоскостью. Получено точное решение интегрального уравнения относительно контактного давления. Приведены графики распределения контактного давления при различных скоростях штампа и вязкоупругих параметров полуплоскости.

Ключевые слова: контактное давление, жесткий штамп, вязкоупругая полуплоскость, интегральное уравнение.

Введение

Задачам о движении штампов с постоянной скоростью по границе вязкоупругой полуплоскости посвящено довольно много исследований как отечественных авторов [1], так и зарубежных. В упомянутых работах недостаточно изучено распределение контактного давления при малых скоростях движения, а также рассматривались случаи штампов с гладкими краями. В настоящем исследовании приводится точное решение задачи о движении плоского штампа по границе вязкоупругой полуплоскости.

Постановка задачи

Пусть по границе вязкоупругой полуплоскости движется штамп в отрицательном направлении оси X. Считаем, что силы трения между штампом и полуплоскостью отсутствуют и вне штампа граница полуплоскости не нагружена. Область контакта между штампом и полуплоскостью описывается неравенством $x \le a$, а основание штампа в области контакта считаем плоским. Кроме того, к штампу приложены погонные сила P и момент M для того, чтобы штамп находился в равновесии.

Скорость движения штампа V считаем во много раз меньше скорости звука в материале полуплоскости, так что в уравнениях движения можно пренебречь инерционными членами. Процесс считаем стационарным, поэтому напряжения σ_{lj}, деформации ε_{lj} и перемещения u_l $(l, j = 1, 2)$ можно представить в форме $f(x + Vt)$.

Будем считать, что материал полуплоскости описывается моделью Кельвина [2]:

$$\sigma_{lj} = \frac{2G_*\nu}{1-2\nu}\theta + 2G_*\varepsilon_{lj}, \quad \theta = \varepsilon_{ll},$$
$$G_* f(t) = G_f\,(f(t) - (\alpha^{-1} - \lambda^{-1})\times \tag{1}$$
$$\times \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\exp[-(t-\tau)/\alpha]d\tau),$$

где λ, α – характерные времена ползучести и релаксации, G_f – мгновенный модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона. Подобная модель применима для описания малосжимаемых резин в области малых деформаций.

Уравнения равновесия и геометрические соотношения имеют стандартный вид. Граничные условия в движущейся со штампом системе координат имеют вид (как принято в линейной теории упругости, граничные условия снесены на недеформированную поверхность тела):

$$\begin{aligned} u_2'(x,0) &= -\delta'(x) \quad (x \le a), \\ \sigma_{22}(x,0) &= 0 \quad (x > a); \end{aligned} \tag{2}$$

кроме того, $\sigma_{lj} \to 0$ при $(x, y) \to \infty$. Здесь a – полудлина области контакта, $u_2'(x,0)$ – производная от вертикальной компоненты перемещения. Так как в данной задаче штамп плоский, то

$$\delta'(x) \equiv 0. \tag{3}$$

Требуется определить распределение контактного давления под штампом $\sigma_{22}(x, 0) = -q(x)$.

Данная задача является смешанной и поэтому сначала необходимо решить вспомогательную задачу о нахождении зависимости производной вертикального перемещения границы полуплоскости от действующей на нее нормальной нагрузки [3].

Решается вспомогательная задача с помощью принципа Вольтерра [2] и преобразования Фурье по координате x.

Вывод и решение интегрального уравнения

Искомая зависимость представлена в [4]. Интегральное уравнение, полученное с помощью данной зависимости, с учетом (3) имеет вид

$$\frac{1}{\pi\Theta_f}\int_{-a}^{a} q(\xi)M(\xi - x)d\xi = 0,$$
$$M(w) = -\frac{1}{2}i\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+\frac{k}{\lambda^{-1}-Vsi}\right]\operatorname{sgn}(s)e^{isw}ds, \tag{4}$$

где $\Theta_f = G_f/(1 - \nu)$. Решается полученное интегральное уравнение методом парных интегральных уравнений [3], для этого оно после предварительного обезразмеривания представляется виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(\alpha)\frac{\alpha\mu + bi}{\alpha\mu + i}(-i)\times$$
$$\times \operatorname{sgn}\alpha e^{-i\alpha x}d\alpha = 0, \quad |x| \le 1, \tag{5}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} T(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = 0, \quad |x| > 1, \tag{6}$$

где $T(\alpha)$ – трансформанта преобразования Фурье от функции $q(x)/\Theta_f$, $\mu = \lambda V/a$, $b = \lambda/\alpha$.

Вводится функция

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T(\alpha)\operatorname{sgn}\alpha e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

относительно которой решается уравнение (5). Функция $p(x)$ имеет вид

$$p(x) = A\exp\left(-\frac{bx}{\mu}\right), \quad A = \text{const}. \tag{7}$$

Затем система (5), (6) решается методом преобразующих операторов [3]. Трансформанта $T(\alpha)$ находится с точностью до констант, которые определяются с помощью подстановки выражения для трансформанты в (5). В результате получено следующее выражение для безразмерного контактного давления $\varphi(x)$ ($\varphi(x) = q(x)/\Theta_f$):

$$\varphi(x) = \frac{N_0}{\pi\sqrt{1-x^2}}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{\mathrm{K}_0(\mu^{-1})(R\mu - 1)}{\mathrm{I}_1(R)K_0(\mu^{-1}) + \mathrm{I}_0(R)\mathrm{K}_1(\mu^{-1})}\times\right.$$
$$\left.\times[\mathrm{I}_1(R) + (1-x^2)(h'(x) - Rh(x)) - xh(x)]\right\},$$
$$h(x) = \int_0^1 I_0\left(R\sqrt{(1-t^2)x^2+t^2}\right)dt, \quad R = b/\mu.$$

Здесь N_0 – сила, действующая на штамп, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, нулевого и первого порядка соответственно.

Список литературы

1. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976.

2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

3. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошной среды со смешанными граничними условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.

4. Александров В.М., Марк А.В. // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. №1. С. 135–142.

THE MOTION OF A FLAT DIE ALONG THE BOUNDARY OF A VISCOELASTIC HALF-PLANE

A.V. Mark

The problem on interaction of a rigid indenter with a viscoelastic half-plane is considered. An exact solution of integral equations for contact is obtained. The diagrams of the contact pressure distribution at different velocities of the indenter and the viscoelastic parameters of the half-plane are given.

Keywords: contact pressure, a hard punch, viscoelastic half-plane, the integral equation.