Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1611–1612

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УПРУГОПЛАСТИКИ

И.П. Марков

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

belov_a2@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается применение методов граничных интегральных уравнений и граничных элементов к решению трехмерных краевых задач упругопластики. Приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: граничный элемент, граничные интегральные уравнения, упруго-пластика.

Основное дифференциальное уравнение в упругопластике для анализа динамических процессов в однородном изотропном теле при отсутствии массовых сил может быть записано в форме приращений:

$$(\lambda+\mu)\Delta u_{j,ji}+\mu\Delta u_{i,jj}=\rho\Delta\ddot{u}_i+\Delta\sigma^0_{ij,j},\quad i,j=\overline{1,3}, \tag{1}$$

где u_i – перемещения, $\ddot{u}_i$ – ускорение, σ^0_{ij} – начальные напряжения, ρ – плотность, λ, μ – константы Ламе, Δ – величина приращения, запятые в нижних индексах – дифференцирование по пространственным координатам. Приращение начальных напряжений определяется как:

$$\Delta\sigma^0_{ij}=\Delta\sigma^e_{ij}-\Delta\sigma^{ep}_{ij},$$

где $\Delta\sigma^e_{ij}=D^e_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}$, $\Delta\sigma^{ep}_{ij}=D^{ep}_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}$, ε_{kl} – деформации; D^e_{ijkl}, D^{ep}_{ijkl} – тензоры упругих и упругопластических констант соответственно.

Решение уравнения (1) может быть представлено как сумма общего решения u^c_i однородного уравнения и частного интеграла u^p_i неоднородного уравнения.

Решения для приращений перемещений, поверхностной силы и напряжений могут быть записаны в виде:

$$\Delta u_i=\Delta u^c_i+\Delta u^p_i,\quad \Delta t_i=\Delta t^c_i+\Delta t^p_i,$$
$$\Delta\sigma_{ij}=\Delta\sigma^c_{ij}+\Delta\sigma^p_{ij}.$$

Гранично-интегральное уравнение (ГИУ), связанное с общими решениями u^c_i и t^c_i, можно записать так:

$$C_{ij}(\xi)\Delta u^c_i(\xi)=\int_s[G_{ij}(x,\xi)\Delta t^c_i(x)-$$
$$-F_{ij}(x,\xi)\Delta u^c_i(x)]dS(x),$$

где G_{ij} и F_{ij} – фундаментальные решения для упругостатического уравнения, $C_{ij}(\xi)=0.5\delta_{ij}$.

Общее решение для приращений внутренних напряжений может быть записано с использованием зависимости между напряжениями и деформациями:

$$\Delta\sigma^c_{ij}(\xi)=\int_s[G^\sigma_{kij}(x,\xi)\Delta t^c_k(x)-$$
$$-F^\sigma_{kij}(x,\xi)\Delta u^c_k(x)]dS(x),$$

где G^σ_{kij} и F^σ_{kij} – ядра для напряжений.

Организация расчетов с использованием метода Ньютона по схеме «упругий предиктор плюс пластический корректор» позволяет ГИУ упругой статики применить для анализа динамических упругопластических задач.

Одна из ключевых проблем – вычисление объемных интегралов. Дана их классификация и приведены различные варианты их вычисления. Например, интеграл по области может быть выражен так:

$$J(x^p)=\int_\Omega\frac{E_{ijkl}(x^p,x)\sigma_{kl}(x)}{r^3(x^p,x)}d\Omega(x),$$

где

$$E_{ijkl}(x^p,x)=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\{(1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{lj}+$$
$$+\delta_{jk}\delta_{li}-\delta_{ij}\delta_{kl}+3\delta_{ij}r,_k r,_l)+$$
$$+3\nu(\delta_{li}r,_j r,_k+\delta_{jk}r,_l r,_i+\delta_{ik}r,_l r,_j+$$
$$+\delta_{jl}r,_i r,_k)3\delta_{kl}r,_i r,_j-15r,_i r,_j r,_k r,_l\},$$

в котором индексы i, j, k, l = 1, 2, 3; ν – коэффициент Пуассона; $\sigma_{kl}(x)$ – начальное напряжение; $r,_i$ – производная от нормы расстояния.

Так как $\sigma_{kl}(x)$ – неизвестная функция, то нельзя проверить, удовлетворяет ли подынтегральное выражение условию положительной однородности степени ноль, но интеграл может быть преобразован – записан в виде:

$$J(x^p) = \int_{\Omega} \frac{E_{ijkl}(x^p, x)[\sigma_{kl}(x) - \sigma_{kl}(x^p)]}{r^D(x^p, x)} d\Omega(x) +$$

$$+ \sigma_{kl}(x^p) I_{ijkl}(x^p),$$

где

$$I_{ijkl}(x^p) = \int_{\Omega} \frac{E_{ijkl}(x^p, x)}{r^D(x^p, x)} d\Omega(x).$$

Полученные таким образом интегралы являются слабосингулярными, что позволяет организовать их аккуратное вычисление.

верхней ($z = 10$) грани. Для случая изотропного упрочнения на рис. 1 изображены вертикальные напряжения, возникшие на верхней стороне куба, как реакция на наложенное усилие и, кроме того, посчитанные эквивалентные напряжения – пластические деформации.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК №2222), при поддержке РФФИ (проект №10-08-01017-а) и по программе Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.

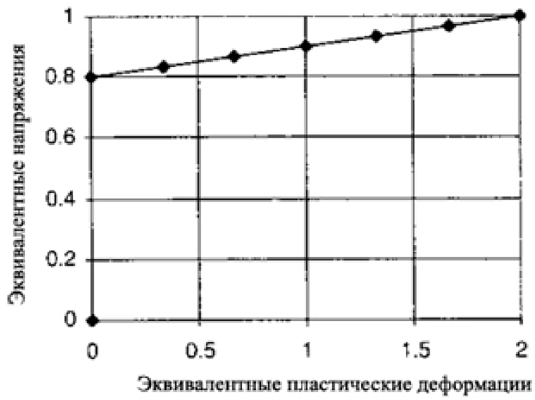

Рис. 1

Рассмотрена задача о кубе 10×10×10, подвергнутом одноосному растяжению. Гранично-элементная схема содержит 24 граничных элемента. Куб был подвергнут одноосному растяжению с

Список литературы

1. Gao X.W., Davies T.G. Boundary Element Programming in Mechanics. Cambridge University Press, 2002.

USING BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR THE ANALYSIS OF 3D BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF ELASTOPLASTICS

I.P. Markov

The boundary integral equation and boundary element method is used for analyzing 3D boundary-value problems of elastoplastics. The results of the numerical experiment are presented.

Keywords: boundary element, boundary integral equations, elastoplastic.