

УДК 539.3

**МНОГОПОВЕРХНОСТНАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ
С ОДНОЙ АКТИВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

© 2011 г.

Б.Е. Мельников, И.Н. Изотов, С.Г. Семенов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

kafedra@ksm.spbstu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Теория предназначена для описания упругопластического деформирования при сложных пассивных нагружениях. Разработаны векторная и тензорная формы определяющих уравнений. Предложен вариант теории, удовлетворяющий термодинамическим ограничениям. Выполнено обобщение уравнений теории на случай произвольного вида поверхности равных пластических податливостей и анизотропии упругих свойств. Проведены экспериментальные исследования таких поверхностей для многозвенных путей нагружения, а также при сложном циклическом нагружении с полными и частичными разгрузками.

Ключевые слова: пассивные пути нагружения, поверхности равных пластических податливостей, определяющие уравнения, термодинамические ограничения, эксперимент, конечно-элементная реализация.

Введение

Большинство существующих моделей пластичности предлагают уточненное описание различных видов активного нагружения. Детальное изучение процессов пассивного нагружения выполняется крайне редко и в подавляющем большинстве работ ограничено предположением упругости разгрузки. Многоповерхностная теория пластичности с одной активной поверхностью позволяет производить уточненное описание пассивного нагружения.

Другой отличительной особенностью многоповерхностной теории пластичности с одной активной поверхностью является отказ от применения поверхности нагружения для описания пластического деформирования. Форма, размеры и положение поверхности нагружения существенно зависят от величины допуска на остаточную деформацию. Этот недостаток устраняется при использовании поверхностей равной податливости, применяемых в рассматриваемой теории.

Условия реверсирования

Одним из центральных понятий теории является понятие реверса. Траектории нагружения в пространстве девиаторов тензора напряжений предполагаются кусочно-гладкими. Подмножество точек излома пути нагружения, для которых дальнейшее распространение напряжений направлено внутрь поверхности равной податливо-

сти, назовем реверсом. Условие возникновения нового k -го реверса можно определить следующим образом:

$$\frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{Ok})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} < 0, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\sigma}_{Ok}$ – центр k -й поверхности равных податливостей, характеризующий ее смещение как жесткого целого. Возникновение нового k -го реверса $\boldsymbol{\sigma}_{Rk}$ обуславливает появление новой $(k+1)$ -й поверхности

$$F_{k+1}(\boldsymbol{\sigma}_A, \boldsymbol{\sigma}_{Rj}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = f_{k+1}(\boldsymbol{\sigma}_A) - \psi_{k+1}(\boldsymbol{\sigma}_{Rj}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (2)$$

определяющей пластическое деформирование. Выше введено обозначение $\boldsymbol{\sigma}_A = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{Ok+1}$ для тензора активных напряжений.

Условие возникновения первого реверса, определяемого формулой (1) при $k = 1$, совпадает с условием начала упругой разгрузки, постулируемым в теории пластического течения, но в отличие от теории течения в многоповерхностной теории появление реверса сопровождается дальнейшим развитием пластической деформации.

При наличии k реверсов на траектории нагружения получаем семейство из $(k+1)$ -й поверхностей равных пластических податливостей. Исходная поверхность F_1 имеет безреверсное происхождение, и ее эволюция определяется так же, как и в теории пластического течения по диаграмме деформирования. Активной, то есть меняющей свои размеры и определяющей пластические де-

формации, является последняя поверхность F_{k+1} , а все предшествующие сохраняют свои параметры неизменными. Рассматриваемые поверхности являются вложенными: каждая предыдущая содержит целиком последующую. Таким образом, активная поверхность обладает самым маленьким размером. Но в процессе нагружения она увеличивается и может сравняться с предшествующей. Такая ситуация классифицируется как вычеркивание последнего k -го реверса и активной становится вместо поверхности F_{k+1} поверхность F_k . Момент вычеркивания реверса определяется совпадением характерных размеров $(k+1)$ -й и k -й поверхностей

$$f_{k+1}(\sigma - \sigma_{Ok+1}) = f_k(\sigma_{Rk} - \sigma_{Ok}). \quad (3)$$

Предложенное соотношение справедливо для поверхностей, эволюция которых ограничивается преобразованиями подобия и трансляции.

Определяющие уравнения

Определяющие уравнения, обобщенные на случай учета анизотропии упругих свойств и произвольности формы поверхности равной податливости, могут быть записаны в виде [1]:

$$d\sigma = \mathbf{D} \cdot (d\epsilon - d\epsilon^p), \quad (4)$$

$$d\epsilon^p = C \frac{\partial f(\sigma_A)}{\partial \sigma} \frac{\partial f(\sigma_A)}{\partial \sigma} \dots d\sigma, \quad (5)$$

где ϵ и ϵ^p – тензоры полной и пластической деформации, $f(\sigma_A) = f_{k+1}(\sigma_A)$ – соответствует активной $(k+1)$ -й поверхности, C – модуль пластической податливости, \mathbf{D} – тензор модулей упругости, определяемый в простейшем случае изотропного материала модулем Юнга и коэффициентом Пуассона.

Если в качестве поверхности равной податливости использовать гиперсферу Мизеса:

$$f(\sigma_A) = f(\mathbf{s}_A) = \sqrt{3/2} \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_A, \quad (6)$$

где \mathbf{s}_A – девиатор тензора активных напряжений σ_A , то закон течения (6) принимает вид:

$$d\epsilon^p = \frac{3}{2} C \frac{\mathbf{s}_A \mathbf{s}_A \cdot d\mathbf{s}}{\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{s}_A}. \quad (7)$$

Как следует из этого уравнения, в случае применения гипотезы (7) процесс пластического деформирования полностью определяется в пятимерном пространстве девиаторов напряжений, поэтому уравнения эволюции поверхностей равной податливости и условия реверсирования опреде-

ляются в этом случае девиаторными составляющими тензоров σ , σ_A , σ_{Rj} , σ_{Oj} , обозначенных соответственно \mathbf{s} , \mathbf{s}_A , \mathbf{s}_{Rj} , \mathbf{s}_{Oj} .

Предложенный вариант теории удовлетворяет термодинамическим ограничениям. Кроме того, выполнено обобщение уравнений теории на случай произвольного вида поверхности равных пластических податливостей и анизотропии упругих свойств.

Экспериментальное исследование

Произведены опыты на сложное переменное нагружение тонкостенных образцов из стали 1X18H10T (растяжение, внутреннее и внешнее давления) и технически чистого (Si – 0.068%; Fe – 0.025%; Cu – 0.02%) никеля (растяжение, кручение).

Выполнены экспериментальные исследования поверхностей равных пластических податливостей для двухзвенных траекторий (путей нагружения), а также при сложном циклическом нагружении с полными и частичными разгрузками. Кроме того, для выявления возможностей теории были поставлены опыты по пассивному нагружению вблизи предельной поверхности Мизеса. Сопоставление данных оригинальных и известных из литературы опытов указывает на их хорошее соответствие.

Конечно-элементная реализация

Определяющие соотношения вписываются в схему МКЭ в форме метода перемещений, что позволяет применять эффективные методы решения нелинейных уравнений типа метода Ньютона–Рафсона. Исследованы условия реверсирования как для малых, так и для конечных приращений нагрузки. В рамках конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR выполнена программная реализация предложенных определяющих соотношений и получено решение ряда нелинейных краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №09-01-00506а.

Список литературы

1. Мельников Б.Е., Семенов А.С. // Тр. СПбГТУ. Прочность матер. и констр. 1996. №556. С. 52–61.

THE MULTI-SURFACE THEORY OF PLASTICITY WITH ONE ACTIVE SURFACE***B.E. Melnikov, I.N. Izotov, S.G. Semenov***

The theory is designed for the description of elastic-plastic deformation under complex passive loading paths. Tensor and vector forms of constitutive equations are developed. A thermodynamically consistent modification of the theory is proposed. A generalization of the theory for the case of arbitrary shape of surfaces with equal compliances and the anisotropy of elastic properties is presented. Surfaces of equal compliances for multilink load paths and for complex cyclic loading with full and partial unloading are experimentally studied.

Keywords: passive loading paths, surfaces of equal compliances, constitutive equations, thermodynamical limitations, experiment, finite element implementation.