Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1624–1626

УДК 539.3

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В.Е. Миренков

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск

mirenkov@misd.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предлагается метод идентификации дефекта в кусочно-однородной пластине, когда неизвестны механические характеристики и граничные условия на контакте с нагружающим устройством. На доступной части пластины предполагаются переопределенные граничные условия. Обсуждаются результаты численной реализации.

Ключевые слова: уравнения, метод, граница, контакт, смещения, напряжения, обратная задача, прямая задача.

Существуют три типа обратных задач для упругих конструкций или их упругих частей: обратные задачи по определению механических характеристик; граничные обратные задачи об идентификации нагрузок; геометрические об определении координат внутренних дефектов в упругом теле. Рассмотрение таких задач, относящихся к некорректным, предполагает экспериментально-аналитических подход. Разделение обратных задач на три типа достаточно условно. Действительно, остановимся, например, на третьем типе, при реализации которого необходимо предположить, что механические характеристики рассматриваемого тела определены точно и формулируемые граничные условия при растяжении удается реализовать точно – по существу, необходимо решать сразу задачи всех трех типов. Требуется исследовать, скажем, панель, которая сжата и вытащить ее для нагружения в перпендикулярном направлении нельзя, и замерить смещения в областях контакта панели с другими частями конструкции не представляется возможным, т.е. приходится ограничиваться только участками доступной свободной поверхности для замера смещений.

Таким образом, использование экспериментальных данных, определенных с погрешностью, дискретизация сплошной среды при любом численном счете вносят погрешность в обратный оператор; априорные предположения о характере деформирования конструкции (абсолютно твердое тело, идеальное проскальзывание, скачок смещений, нарушение конформности в конечном числе точек и т.п.) вносят погрешность в граничные условия при формулировке задачи и расширяют класс обратных задач. Все такие обратные задачи некорректны, т.е. их решения могут не существовать, быть неединственными или неустойчивыми (малым изменениям наблюдаемых данных могут соответствовать большие изменения искомых), но для всех них общее требование – необходимость преодоления некорректности через регуляризацию [1, 2] или же через получение точных уравнений, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений, описывающих процесс деформирования в рамках выбранной модели, исключающих регуляризацию.

Будем понимать регуляризацию как попытку исправить «сознательно» допущенные неточности в виде всевозможных априорных предположений о поведении конструкций, несовместные с условиями, допускаемыми моделью среды.

Выписывая, следуя Колосову–Мусхелишвили [3], граничные условия первой и второй основных задач теории упругости и исключая комплексные потенциалы, получим систему сингулярных интегральных уравнений, связывающую граничные значения компонент напряжений и смещений, в виде

$$f(t_0)+2\mu g(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)+2\mu g(t)}{t-t_0}dt,$$

$$\kappa\overline{f(t_0)}-2\mu\overline{g(t_0)}=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\kappa\overline{f(t_0)}-2\mu\overline{g(t_0)}}{t-t_0}dt+$$

$$+\int_\Gamma\left[f(t)+2\mu g(t)\right]d\,\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}, \qquad (1)$$

где $\kappa=3-4\nu$, $\mu=E[2(1+\nu)]^{-1}$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона;

$$f(t) = i\int_0^t (X_n + iY_n)ds, \tag{2}$$

X_n, Y_n – компоненты усилий в направлении осей x и y; $g = u + iv$; u, v – компоненты смещений в направлении осей x и y; i – мнимая единица; черточка над функцией обозначает комплексно сопряженное значение; Γ – граница рассматриваемой области; t_0 – аффикс точки границы Γ. Система уравнений (1) характеризует одновременно и единообразно все три основные задачи теории упругости, которые могут использоваться в той или иной вариации.

Таким образом, приведенная точная система уравнений позволяет выписать решение для компонент смещений в квадратурах и аналогично для компонент напряжений, что дает возможность исключить процесс регуляризации и предложить метод сведения проблемы к процедуре последовательных приближений, сходящихся к точному решению для упругих постоянных, граничных условий и геометрии ослабления их вариацией. Предложенный метод иллюстрируется на примере восстановления геометрии ослабления, лежащего на прямолинейной границе раздела свойств кусочно-однородной пластины, нагруженной на торцах и свободных от напряжений боковых гранях, доступных для получения данных о смещениях. На прямолинейной границе раздела свойств составляющих пластину частей предполагаются условия сцепления, которые легко заменить на другие, если это следует из поведения смещений на боковых гранях. Для всех контактных участков пластины выписаны уравнения, определяющие нормальные и касательные компоненты смещений и действительные и мнимые части (2), что позволяет получать решения прямых задач, задав первое приближение, которые сравниваются с дополнительной информацией. Для каждой из частных обратных задач последовательно переопределенные условия в смещениях позволяют определить второе приближение на всех контактах. Действительно, значения дополнительных смещений на боковых гранях пластинки сразу дают следующую информацию: в какой части модуль Юнга больше, как примерно проходит линия раздела упругих свойств этих частей и, если есть дефект, в какой части от середины он находится; представляется возможным сформулировать в первом приближении граничные условия на торцах, например $u_1(t_0)$, $v_1(t_0)$. Вариация значений модулей Юнга (не уменьшая общности считаем, что коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.2$) из прямых задач позволяет получить (сравнивая с переопределенными условиями) первое приближение, которое используется для определения геометрии ослабления как некоторой оценки, и, наконец, с использованием переопределенных условий можно выписать значения напряжений на всех контактах. Последние позволяют рассмотреть прямые задачи для частей пластинки и определить второе приближение $u_2(t_0)$ и $v_2(t_0)$ на торцах. На этом заканчивается первый цикл приближения. Число циклов определяется наперед заданной точностью вычисления. В процессе реализации определяются упругие характеристики составной пластины, граничные условия на торцах (контактах), геометрия ослабления. На тестовом примере показано, что с ростом числа приближений различие между приближенным и точным решением уменьшается и решение колеблется около точного, т.е. процесс является сходящимся. Если свести граничные задачи теории упругости к системам интегральных уравнений, то полученные в результате упрощений обратные проблемы сведутся к уравнениям типа Фредгольма первого рода.

В качестве частного случая обратной некорректной проблемы об идентификации граничных условий рассмотрим задачу о вдавливании упругого штампа с горизонтальным основанием в упругую полуплоскость, которая в [3] была упрощена до случая абсолютно жесткого штампа, вдавливаемого в полуплоскость со сцеплением на контакте. «Точное» решение этой задачи приведено в [3], а точная система сингулярных интегральных уравнений, связывающая компоненты напряжений $\sigma_y(x)$ и $\tau(x)$ и смещений $u(x)$ и $v(x)$ на границе полуплоскости, получается из (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} 2\mu u'(x) &= a\sigma_y(x) + b\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)}{t-x}dt, \\ 2\mu v'(x) &= -a\tau(x) + b\int_{-1}^{1}\frac{\sigma_y(t)}{t-x}dt, \end{aligned} \tag{3}$$

где μ, a, b характеризуют среду полуплоскости; $u'(x)$, $v'(x)$ – производные компонент смещений по x. В предположениях [3] в системе (3) левые части равны нулю, и она сводится к вырожденной системе уравнений, которые требуют регуляризации, а без учета регуляризации известное решение этой задачи, хотя и единственно, но некорректно, так как отсутствует непрерывная зависимость его от исходных данных, и решение не имеет предела при стремлении к угловым точкам под штампом. Решение задачи, некорректно поставленной, в теории упругости не имеет практической ценности.

Таким образом, система уравнений (1) позволяет не только единообразно и одновременно рассматривать прямые и обратные задачи, но и ослабить требования на переопределенность, определить степень некорректности при их формулировке, когда используются предположения типа «пусть будет», «положим», и т.п., требующие в ряде случаев регуляризацию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №09-05-00133.

Список литературы

1. Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 1987. 303 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 386 с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS IN INVERSE PROBLEMS

V.E. Mirenkov

The paper describes the method of identification of a defect in a piecewise-homogeneous plate, when the boundary conditions at the interface of the plate and the load-applying unit are unknown and the boundary conditions on the free part of the plate are assumed over-determined. Numerical implementation results are discussed.

Keywords: equations, method, boundary, contact, displacements, stresses, inverse problem, direct problem.