Механика деформируемого твердого тела
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1636–1638

УДК 539.3

ОБОБЩЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ГАЛИНА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШТАМПОВ

А.А. Молчанов, Д.А. Пожарский

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

pozharda@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрены пространственные контактные задачи об одновременном действии на грани упругого клина эллиптического в плане штампа и сосредоточенной силы, приложенной вне области контакта на ребре клина. Другая грань клина свободна от напряжений или находится в условиях скользящей заделки. Для штампа относительно удаленного от ребра клина при заданной области контакта построены регулярные асимптотические решения. В частном случае, когда клин с одной свободной гранью разворачивается в полупространство, а область контакта круговая, построенное решение совпадает с разложением в ряд точного решения контактной задачи Галина. Для эллиптического штампа, расположенного относительно близко к ребру клина, при неизвестной области контакта при помощи метода нелинейных граничных интегральных уравнений (ИУ) найдены численные решения. С использованием асимптотического и численного методов изучена задача о взаимодействии двух штампов на одной грани упругого клина. При помощи асимптотического метода решены контактные задачи для упругого слоя при действии дополнительной сосредоточенной силы вне эллиптической области контакта. Нижняя грань слоя находится в условиях скользящей или жесткой заделки. Методом нелинейных граничных ИУ изучены контактные задачи с неизвестной областью контакта о вдавливании двух одинаковых штампов в упругий слой.

Ключевые слова: теория упругости, контактные задачи, асимптотические решения, граничные интегральные уравнения.

Обобщение задачи Галина для клина

В цилиндрических координатах r, φ, z рассмотрим пространственный упругий клин $\{0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le \alpha,\ -\infty < z < \infty\}$ угла раствора α, ось z направлена по ребру клина. Материал клина характеризуется модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν. Грань $\varphi = 0$ свободна от напряжений (задача А) или находится в условиях скользящей заделки (задача Б). В грань $\varphi = \alpha$ без перекоса вдавливается эллиптический в плане штамп с плоским основанием, к которому приложена сила P. Область контакта – эллипс $\Omega = \{(r-a)^2/c^2 + z/b^2\}$, $b \ge c$, $a > c$. В начале координат $r = z = 0$ к грани $\varphi = \alpha$ приложена нормальная сосредоточенная сила Q. Для простоты считаем задачу симметричной по z. Осадка штампа равна δ. При заданных величинах α, G, ν, a, b, c и δ требуется определить контактное давление $\sigma_\varphi = -q(r, z)$ в области Ω и затем найти силу P. Для задачи А сила Q вызывает в заданной области контакта Ω дополнительное нормальное перемещение [1] (для задачи Б все аналогично):

$$u_\varphi(r,\alpha,z) = -\frac{QA_0(r,z)}{2\pi\theta\sqrt{r^2+z^2}},$$

$$\theta = \frac{G}{1-\nu},\quad A = \pi\frac{2\alpha+\sin 2\alpha}{2(\alpha^2-\sin^2\alpha)},$$

$$W_\pm(u) = \pm\frac{\operatorname{ch}\alpha u \mp \cos\alpha}{\operatorname{sh}\alpha u \pm u\sin\alpha}, \tag{1}$$

$$A_0(r,z) = A + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{th}\frac{\pi u}{2}[W_+(u)F_+(u) - W_-(u)F_-(u)]\cos(u\ln((\sqrt{r^2+z^2}+|z|)/r))\,du.$$

Используя (1) и функцию Грина [1], для задачи А получим ИУ вида ($K_{iu}(r)$ – функция Бесселя)

$$\frac{2}{\theta\pi^3}\int_\Omega q(x,y)K(x,y,r,z)\,dxdy = \delta - \frac{QA_0(r,z)}{2\pi\theta\sqrt{r^2+z^2}},$$

$$(r,z)\in\Omega,\quad (r,z)\in\Omega, W(u) = \frac{W_+(u)-W_-(u)}{2}, \tag{2}$$

$$K(x,y,r,z) = \int_0^\infty\int_0^\infty \{\operatorname{sh}\pi u W(u)K_{iu}(\beta x) + \operatorname{sh}\frac{\pi u}{2}[W_+(u)F_+(u,\beta x) - W_-(u)F_-(u,\beta x)]\}\times K_{iu}(\beta r)\cos\beta(z-y)\,d\beta du.$$

Функции $F_\pm(u)$, $F_\pm(u,x)$ в (1), (2) удовлетворяют ИУ Фредгольма второго рода ($0 \le u < \infty$)

$$F_{\pm}(u)-(1-2\nu)\int_0^{\infty}L_{\pm}(u,y)F_{\pm}(y)dy=$$
$$=\frac{\pi}{2}(1-2\nu)L_{\pm}(u,0),$$
$$F_{\pm}(u,\beta x)=(1-2\nu)\int_0^{\infty}L_{\pm}(u,y)[F_{\pm}(y,\beta x)+$$
$$+\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2}K_{iy}(\beta x)]dy,$$
$$L_{\pm}(u,y)=2\operatorname{ch}\frac{\pi u}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{2}W_{\pm}(y)\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\pi t\, g_{\pm}(t)dt}{(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi u)(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi y)},$$
$$g_{\pm}(t)=\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{ch}\alpha t\mp\cos 2\alpha}\left(\operatorname{cth}\frac{\alpha t}{2}\right)^{\pm 1}.$$

Для решения ИУ (2) и аналогичного ИУ в задаче Б использован регулярный асимптотический метод [1, 2], эффективный для относительно удаленной от ребра клина области Ω. Контактное давление разложено в ряд по отрицательным степеням геометрического параметра $\lambda = a/b$. При $\alpha = \pi$ для задачи А, когда Ω – круг, построенное решение совпадает с разложением в ряд точного решения контактной задачи Галина [3, 4].

Взаимодействие штампов на клине

В трехмерной постановке изучено взаимодействие двух симметричных эллиптических в плане штампов на одной грани упругого клина при разных типах граничных условий на другой грани (отсутствие напряжений, скользящая или жесткая заделка) [5]. Материал клина для простоты принят несжимаемым. При заданной области контакта регулярное асимптотическое решение получено для штампов, относительно удаленных как друг от друга, так и от ребра клина. Для случая, когда штампы расположены относительно близко от ребра клина (или выходят на ребро; область контакта неизвестна), применен численный метод нелинейных граничных ИУ [1]. Оценено взаимовлияние штампов.

Обобщение задачи Галина для слоя

Исследованы пространственные контактные задачи о внедрении эллиптического в плане жесткого штампа в верхнюю грань упругого слоя при действии дополнительной сосредоточенной силы вне области контакта. Нижняя грань слоя находится в условиях скользящей или жесткой заделки. Для решения ИУ, к которому сведены задачи, применяется регулярный асимптотический метод [1, 2]. В результате контактное давление оказывается разложенным в ряд по степеням малого параметра, характеризующего относительную толщину упругого слоя. Для круговой области контакта при стремлении к нулю малого параметра (слой вырождается в полупространство) полученное решение стремится к точному решению контактной задачи Галина [3, 4]. Сделаны расчеты при разных значениях малого параметра. Построенное решение, в частности, позволяет применить метод Андрейкина–Панасюка [4] для исследования контактной задачи о вдавливании нескольких круговых штампов разного радиуса в упругий слой.

Взаимодействие штампов на слое

Изучены пространственные контактные задачи с неизвестной областью контакта для упругого слоя конечной толщины, в одну грань которого симметрично вдавливаются два одинаковых эллиптических в плане жестких штампа (два эллиптических параболоида). Другая грань слоя находится в условиях скользящей или жесткой заделки. Задачи сведены к ИУ относительно контактного давления. Для решения применяется метод Галанова [1]. Ввиду того, что область контакта неизвестна, получается система ИУ (в области контакта) и интегрального неравенства (в дополнительной области). Вводятся специальные нелинейные операторы, позволяющие получить одно нелинейное операторное уравнение типа Гаммерштейна, эквивалентное системе. В ходе решения этого уравнения удается одновременно определить контактные давления и область контакта (область, где функция давлений положительна). Сделаны расчеты при разных значениях относительной толщины слоя и относительного расстояния между штампами.

Работа поддержана РФФИ (гранты № 09-01-00004, 11-01-00777).

Список литературы

1. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.

2. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.

4. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.

5. Молчанов А.А., Пожарский Д.А. Взаимодействие штампов на грани упругого клина // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 681–690.

GENERALIZATION OF THE GALIN CONTACT PROBLEM AND PUNCH INTERACTION

A.A. Molchanov, D.A. Pozharskii

Three-dimensional contact problems of an elastic wedge are considered for the case of an elliptic punch and an extra concentrated force acting outside the contact zone on the wedge edge. The other wedge face is stress-free or subject to sliding support. Regular asymptotic solutions are constructed for the case when the contact zone is given and the punch is relatively remote from the wedge edge. For the particular case when the wedge with one stress-free face transforms into a half-space, the solution obtained for a circular contact zone coincides with the well-known Galin exact solution expanded into a power series. For an elliptic punch situated relatively nearly to the wedge edge when the contact zone is unknown, numerical solutions are calculated using the method of nonlinear boundary integral equations (BEM). The problem of interaction of two punches on one wedge face is treated with the help of the asymptotic and of the numerical method. Using the asymptotic method, the contact problems for an elastic layer are investigated for the case of an extra concentrated force acted outside an elliptic contact zone. The other layer face is fixed or subject to sliding support. Using the nonlinear BEM, the contact problems are analyzed for two identical punches on a layer face.

Keywords: elasticity theory, contact problems, asymptotic solutions, boundary integral equations.