

УДК 539.3

**ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
А.А. ИЛЬЮШИНА НА СЛУЧАЙ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

© 2011 г.

А.В. Муравлев

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

a.v.muravlev@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предлагается вариант обобщения теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина на случай конечных деформаций термовязкопластического материала, основанный на использовании двух разных тензоров конечных деформаций при построении функционалов пластичности. Функционал скалярных свойств зависит от голономного тензора логарифмических деформаций Генки, функционалы векторных свойств – от неголономного тензора конечных деформаций, порожденного нейтральной объективной коротационной производной.

Ключевые слова: функционалы пластичности, тензор конечных деформаций, постулат изотропии, сложное нагружение.

**«Скалярный» и «векторный» образы
процесса нагружения**

В существующих подходах к обобщению теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина [1] на случай конечных деформаций [2–5] вместо тензора малых деформаций выбирается какой-либо тензор конечных деформаций, и на его основе формулируются все понятия и положения этой теории. В частности, для таких обобщений использовался тензор логарифмических деформаций Генки \mathbf{H} , а также тензор конечных деформаций \mathbf{E}^N , порождаемый нейтральной объективной коротационной производной. В настоящем исследовании для обобщения теории упругопластических процессов Ильюшина со случая малых деформаций и малых поворотов на случай конечных деформаций и конечных поворотов предлагается использовать оба упомянутых выше тензора конечных деформаций \mathbf{H} и \mathbf{E}^N . Обобщенные пятимерные евклидовы пространства напряжений и деформаций Ильюшина аналогично [1] могут быть построены по компонентам девиатора \mathbf{S} тензора истинных напряжений Коши и девиаторов тензоров конечных деформаций \mathbf{H} и \mathbf{E}^N во вращающемся полярном ортонормированном репере. Вращение этого репера отождествляется с поворотом частицы деформируемого тела как жесткого целого и задается ортогональной матрицей поворота из полярного разложения аффинора деформации. Движение частицы деформируемого тела относительно полярного репера отождествляется с процессом чистой деформации.

В рассматриваемом подходе к обобщению теории упругопластических процессов на случай конечных деформаций [6] строятся две траектории деформаций (в упомянутом выше пространстве деформаций): одна – на основе голономного левого пространственного тензора логарифмических деформаций Генки \mathbf{H} , вторая – на основе неголономного тензора конечных деформаций \mathbf{E}^N , порождаемого нейтральной объективной коротационной производной. Следует отметить, что внутренняя геометрия траектории логарифмических деформаций, построенной на основе компонент левого пространственного тензора Генки в полярном репере, всегда совпадает с внутренней геометрией траектории логарифмических деформаций, построенной на основе компонент правого материального тензора Генки в начальном базисе.

В теории упругопластических процессов физическому процессу нагружения (деформирования) ставится в соответствие образ процесса нагружения, полностью задающий свойства связи напряжений с деформациями. Физическому процессу нагружения (деформирования) при конечных деформациях будем ставить в соответствие два обобщенных образа процесса нагружения: один – для задания скалярных, а второй – для задания векторных свойств связи напряжений с деформациями. Далее, для краткости, будем называть их «скалярным» и «векторным» образами процесса нагружения соответственно. Оба они определены в упомянутых выше пятимерных евклидовых пространствах напряжений и деформации.

ций. «Скалярный» образ процесса нагружения включает в себя траекторию деформаций (построенную по голономному тензору логарифмических деформаций Генки \mathbf{H}) с заданными в каждой точке значениями времени, длины дуги этой траектории деформаций и скорости ее изменения, гидростатического давления, температуры, а также включает в себя величину модуля вектора напряжений в каждой точке траектории, получаемую в результате физического процесса нагружения по этой траектории деформаций. «Векторный» образ процесса нагружения включает в себя траекторию деформаций (построенную по неголономному тензору деформаций \mathbf{E}^N) с заданными в каждой точке значениями времени, длины дуги этой траектории деформаций и скорости ее изменения, гидростатического давления, температуры, а также включает в себя единичный направляющий вектор для вектора напряжений в каждой точке траектории, получаемый в результате физического процесса нагружения по этой траектории деформаций.

Постулат изотропии

Использование введенных понятий «скалярного» и «векторного» образов процесса нагружения позволяет (по аналогии с теорией упругопластических процессов Ильюшина) сформулировать постулат изотропии для начально-изотропного тела: независимо друг от друга «скалярный» и «векторный» образы процесса нагружения инвариантны относительно ортогональных преобразований в пятимерных евклидовых пространствах напряжений и деформаций. Данная формулировка допускает ситуацию, когда у двух разных физических процессов деформирования образы процесса нагружения одного вида («скалярные» или «векторные») совпадают (с точностью до ортогонального преобразования), а другого вида — нет. Например, для процесса простого сдвига (при котором происходит поворот главных осей тензоров деформаций относительно материальных волокон) траектории деформаций из «скалярного» и «векторного» образов процесса нагружения различны. Напротив, для процессов деформирования без поворота главных осей относительно материальных волокон, обе траектории деформаций из «скалярного» и «векторного» образов процесса нагружения всегда совпадают друг с другом. Сформулированный постулат изотропии (так же как и постулат изотропии в теории упругопластических процессов Ильюшина) следует считать гипотезой, требующей дальнейшей экспериментальной проверки.

Полярное представление функционалов пластичности

Аналогично теории упругопластических процессов Ильюшина, из сформулированного постулата изотропии следует, что скалярные и векторные функционалы пластичности являются функционалами от параметров внутренней геометрии предшествующих участков соответствующих траекторий деформаций. При этом скалярные свойства определяются по траектории логарифмических деформаций (например, по длине ее дуги). Векторные свойства (а также степень сложности процесса нагружения и величина следа запаздывания) определяются по траектории деформаций, построенной с использованием нейтральной коротационной производной. Для этой же траектории деформаций предлагается использовать полярное представление вектора напряжений в сопровождающем ортонормированном репере Френе, и в качестве функционалов пластичности, описывающих векторные свойства процесса нагружения, использовать четыре угла пятимерной сферической системы координат (полярные функционалы пластичности). Представление полярных функционалов пластичности в виде функциональных рядов по параметрам кривизны траектории деформаций обладает определенной структурой и свойствами четности. Доказана теорема четности для этих функционалов, в соответствии с которой каждый полярный функционал является нечетным по соответствующему ему по номеру параметру кривизны и четным по всем остальным параметрам кривизны. Это позволяет упрощать варианты разложения полярных функционалов пластичности в окрестности произвольного сложного процесса деформирования и дает возможность использования таких разложений в конкретных приложениях. Также исследована возможная структура функционала скалярных свойств для термовязкопластических материалов, в частности, возможность использования длины дуги траектории логарифмических деформаций Генки и скорости ее изменения в качестве величины эффективной накопленной пластической деформации и скорости ее изменения соответственно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-08-00933.

Список литературы

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.

2. Левитас В.И. Определяющие соотношения для упругопластических материалов при конечных деформациях. Кинематика. Аналог теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина. М., 1985. 39 с. Деп. в ВИНТИ 03.10.85. №7018-В-85.
3. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации. Теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
4. Маркин А.А., Толоконников Л.А. Меры и определяющие соотношения конечного упругопластического деформирования // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во Горьковского университета, 1987. С. 32–37.
5. Бровко Г.Л. Понятия образа процесса и пятимерной изотропии свойств материалов при конечных деформациях // ДАН СССР, 1989. Т. 308, №3. С. 565–570.
6. Муравлев А.В. Об одном варианте обобщения теории процессов малой кривизны на случай конечных деформаций термовязкопластического материала // Упругость и неупругость. М.: URSS, 2006. С. 211–217.

THE GENERALIZATION OF ILYUSHIN'S THEORY OF ELASTOPLASTIC PROCESSES FOR FINITE DEFORMATIONS

A. V. Muravlev

The variant of generalization of Ilyushin's theory of elastoplastic processes on the case of finite deformations of thermo-visco-plastic material, based on using two different tensors of finite deformations at construction of functionals of plasticity, is presented. The functional of scalar properties depends on Hencky holonomic tensor of logarithmic deformations, functionals of vectorial properties – from a nonholonomic tensor of finite deformations, induced by neutral objective corotation derivative.

Keywords: functionals of plasticity, tensor of finite deformations, postulate of isotropy, complex loading.