Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1654–1656

УДК 539.3

МЕТОД ЖЕСТКОСТНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА МНОГОСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛИТ

Ю.В. Немировский[1], ***Г.Л. Горынин***[2]

[1]Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск
[2]Сургутский госуниверситет

ggorynin@list.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Дан краткий обзор результатов, которые позволяют получить метод жесткостных функций при решении задач пространственного расчета напряженно-деформированного состояния многослойных стержней и плит, образованных из упругих анизотропных материалов, в постановке Сен-Венана. Показана универсальность данного метода относительно традиционно используемых моделей деформирования стержней и пластин.

Ключевые слова: многослойный стержень, многослойная плита, пространственная задача теории упругости, жесткостная функция, асимптотическое приближение.

В 1995–98 гг. в журнале «Механика твердого тела. Известия СО РАН» развернулась дискуссия о проблемах моделирования оболочек, пластин и стержней. Причем главным объектом дискуссии фактически оказались пластины, т.к. оболочки в силу искривленности естественно сложнее пластин, а относительно стержней неявным образом предполагалось, что стержень – это та же пластина, только в условиях цилиндрического изгиба. Между тем, такое мнение справедливо только для стержней прямоугольной формы, работающих либо в условиях плоской деформации, либо плоского напряженного состояния. Для стержней же произвольного сечения характерно чрезвычайно сложное напряженное состояние, и традиционные методы, предлагаемые при моделировании поведения пластин, такие как использование ряда Тейлора и многочленов Лежандра по поперечной координате, в этом случае принципиально неприменимы. Фактически для стержней произвольного сечения за последние сто лет существенных теоретических продвижений не произошло и существует ровно два действенных подхода: модель Бернулли – Эйлера и уточненная модель Тимошенко. Обе модели основаны на введении «правдоподобных» гипотез, причем во второй модели содержится коэффициент Тимошенко, алгоритм вычисления которого не определен и предполагает введение дополнительных специальных гипотез для разных видов сечений стержня. Кроме этого, существует классический метод Сен-Венана, получивший развитие в трудах Митчелла и Альманси, но который не получил своего дальнейшего развития из-за сложности возникающих при его использовании краевых задач. Сказанное выше справедливо в отношении однородных стержней, для слоистых же стержней задача усложняется, так как добавляются проблемы, вызванные взаимодействием слоев, в частности кромочные эффекты.

В 2004 году авторами для слоистых упругих изотропных стержней произвольного сечения был разработан метод жесткостных функций (имеется другое более математизированное название – метод асимптотического расщепления) [1], который представляет собой теоретическое развитие метода Сен-Венана. Метод обладает тем свойством, что его применение позволяет не только автоматически получить результаты Митчелла и Альманси, но и позволяет получить модели Бернулли – Эйлера и Тимошенко без введения каких-либо гипотез для слоистых стержней как разные степени асимптотического приближения к точному решению пространственной задачи теории упругости; при этом автоматически строится теория вычисления коэффициента Тимошенко. Метод позволяет вычислить ошибку от использования той или другой модели при решении конкретной задачи, что само по себе является серьезным теоретическим результатом.

В дальнейшем оказалось, что данный метод справедлив не только в случае изотропных слоев, но и для слоев с произвольной анизотропией [2, 3]; получено теоретическое обоснование ситуаций, когда можно использовать гипотезу плоских сечений в качестве первого асимптотического приближения и когда этого делать нельзя. В частности, если слои стержня ортотропны, причем оси ортотропии не совпадают с осью стержня, то гипотеза плоских сечений не является первым приближением и, следовательно, неприменима.

Применение метода жесткостных функций чрезвычайно упрощает исследование и кромочного эффекта, так как позволяет свести решение трехмерной задачи о нахождении пограничного слоя вблизи продольных кромок к плоской задаче о нахождении пограничного слоя в сечении. В частности, таким образом получен важный теоретический результат, найдено условие кромочной совместимости слоев, т.е. условие, при выполнении которого пограничный слой вблизи кромки отсутствует.

Основная идея метода состоит в том, что задача деформирования слоистого стержня решается как пространственная задача теории упругости в постановке Сен-Венана, при этом все перемещения и напряжения ищутся как суммы дифференциальных операторов по продольной переменной, коэффициенты которых называются жесткостными функциями и которые зависят от двух координат плоскости поперечного сечения:

$$(u_z)_i^{(n)} = \sum_{\eta\in\{u,v,w\}}\left[\sum_{k=0}^{n+1}(U_z^{\eta})_i^{(k)}\frac{d^k\eta_0^{(n)}}{dz^k}\varepsilon^k\right],$$

$$(u_\alpha)_i^{(n)} = \sum_{\eta\in\{u,v,w\}}\left[\sum_{k=0}^{n+2}(U_\alpha^{\eta})_i^{(k)}\frac{d^k\eta_0^{(n)}}{dz^k}\varepsilon^k\right],$$

$$(\sigma_{zz})_i^{(n)} = \sum_{\eta\in\{u,v,w\}}\left[\sum_{k=0}^{n}(\tau_{zz}^{\eta})_i^{(k)}\frac{d^k\eta_0^{(n)}}{dz^k}\varepsilon^k\right], \quad (1)$$

$$(\sigma_{z\alpha})_i^{(n)} = \sum_{\eta\in\{u,v,w\}}\left[\sum_{k=0}^{n+1}(\tau_{z\alpha}^{\eta})_i^{(k)}\frac{d^k\eta_0^{(n)}}{dz^k}\varepsilon^k\right],$$

$$(\sigma_{\alpha\beta})_i^{(n)} = \sum_{\eta\in\{u,v,w\}}\left[\sum_{k=0}^{n+2}(\tau_{\alpha\beta}^{\eta})_i^{(k)}\frac{d^k\eta_0^{(n)}}{dz^k}\varepsilon^k\right],$$

$$\alpha,\beta\in\{x,y\}.$$

Жесткостные функции являются решениями следующих краевых задач в плоскости сечения стержня:

– система уравнений

$$\frac{\partial(\tau_{\alpha x}^{\eta})_i^{(k)}}{\partial x}+\frac{\partial(\tau_{\alpha y}^{\eta})_i^{(k)}}{\partial y}+(\tau_{\alpha z}^{\eta})_i^{(k-1)}=0,$$
$$\alpha\in\{x,y,z\}; \quad (2)$$

– условия на границе сечения

$$(\tau_{\alpha x}^{\eta})_i^{(k)}n_x+(\tau_{\alpha y}^{\eta})_i^{(k)}n_y=(B_\alpha^{\eta})^{(k)}f_\alpha(\Gamma); \quad (3)$$

– условия сопряжения слоев

$$(\tau_{\alpha x}^{\eta})_i^{(k)}n_x+(\tau_{\alpha y}^{\eta})_i^{(k)}n_y=(\tau_{\alpha x}^{\eta})_j^{(k)}n_x+(\tau_{\alpha y}^{\eta})_j^{(k)}n_y,$$
$$(U_\alpha^{\eta})_i^{(k)}=(U_\alpha^{\eta})_j^{(k)}, \quad i,j=[1,s], \quad (4)$$

$$(\tau_{\alpha\beta}^{\eta})_i^{(k)}=(\mathrm{E}_{\alpha\beta xx})_i\frac{\partial(U_x^{\eta})_i^{(k)}}{\partial x}+(\mathrm{E}_{\alpha\beta yy})_i\times$$
$$\times\frac{\partial(U_y^{\eta})_i^{(k)}}{\partial y}+(\mathrm{E}_{\alpha\beta zz})_i(U_z^{\eta})_i^{(k-1)}+$$
$$+0.5\sum_{\psi\in\{x,y\}}\left((\mathrm{E}_{\alpha\beta\psi z})_i\left(\frac{\partial(U_z^{\eta})_i^{(k)}}{\partial\psi}+(U_\psi^{\eta})_i^{(k-1)}\right)\right)+$$
$$+0.5(\mathrm{E}_{\alpha\beta xy})_i\left(\frac{\partial(U_x^{\eta})_i^{(k)}}{\partial y}+\frac{\partial(U_y^{\eta})_i^{(k)}}{\partial x}\right); \quad (5)$$

– условие разрешимости задачи

$$(B_\alpha^{\eta})^{(k)}=-\sum_{i=1}^{s}\int_{F_i}(\tau_{\alpha z}^{\eta})_i^{(k-1)}\,dF, \quad \alpha\in\{x,y,z\}. \quad (6)$$

Задача (2)–(6) существенно проще исходной пространственной задачи теории упругости, на этом обстоятельстве основаны все те результаты, которые были изложены выше.

Данный метод допускает свое естественное обобщение и для задач изгиба слоистых пластин; в этом случае перемещения и напряжения ищутся в виде сумм частных дифференциальных операторов, коэффициенты которых называются жесткостными функциями и зависят от поперечной координаты к плоскости пластины [4]. Метод позволяет установить важный теоретический результат: независимо от числа слоев и анизотропных свойств слоев модель Кирхгофа – Лява всегда является первым асимптотическим приближением к пространственной задаче теории упругости.

Представленный метод жесткостных функций применим не только в случае механических нагрузок на слоистые стержни и пластины, но и в случае температурных нагрузок и нагрузок, вызванных предварительными деформациями [1, 2].

Список литературы

1. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. Новосибирск: Наука, 2004. 408 с.

2. Горынин Г.Л. Пространственные задачи слоистых анизотропных конструкций: монография. Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. 262 с.

3. Gorynin G.L., Nemirovskii Yu.V. Deformation of laminated anisotropic bars in the three-dimensional statement 1.Transverse-longitudinal bending and edge compatibility condition // Mechanics of Composite Materials. 2009. Vol. 45, No 3. P. 257–280.

4. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Метод асимптотического расщепления в задачах продольно-поперечного изгиба анизотропных слоистых плит // Механика композитных материалов и конструкций. 2007. Т. 13, №4. С. 548–580.

METHOD OF STIFFNESIBLE FUNCTIONS IN CALCULATION PROBLEMS OF MULTILAYERAL BEAMS AND PLATES

Yu.V. Nemirovsky, G.L. Gorynin

A brief survey of results achivable with method of stiffnesible functions is provided. The method is used for solution of spatial calculation problems of multilayeral beams and plates made of elastic anisotropic materials in stress-strain conditions in Saint-Venant setting. The universality of this method is demonstrated relatively to traditionally used models of beams and plates deformation.

Keywords: multilayered beam, multilayered plate, spatial theory of elasticity, stiffnessible function, asymptotic approach.