УДК 539.3

ПРОБЛЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

С.А. Нестеров

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

1079@list.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена задача об идентификации неоднородных свойств термоупругой среды. Предложен итерационный алгоритм, основанный на поэтапном решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: неоднородный стержень, интегральные уравнения, термоупругость.

Введение

Постоянно расширяющееся применение функционально-градиентных материалов в различных областях техники требует учета существенной неоднородности свойств этих материалов, что позволяет оптимально проектировать конструкции. В связи с этим актуальной остается проблема неразрушающего контроля характеристик неоднородных материалов при изготовлении, которая основывается на применении аппарата коэффициентных обратных задач (КОЗ). В настоящий момент накоплен большой опыт решения КОЗ теории упругости [1], теплопроводности [2] и термоупругости в случае малой связанности [3] для неоднородных тел, основанный на сведении прямых одномерных задач к уравнениям Фредгольма второго рода, а нелинейных обратных задач – к итерационной процедуре, на каждом шаге которой решается линейная задача. При этом линеаризация проводится с использованием условия ортогональности, либо обобщенной теоремы взаимности, либо вариационного подхода. Данный подход применен для решения КОЗ связанной термоупругости неоднородного стержня.

Постановка задачи

Рассмотрим закрепленный на торце $x = 0$ термоупругий стержень длиной l, в котором колебания возбуждаются при помощи внезапного приложенного к торцу $x = l$ теплового потока. Считаем, что модуль Юнга, удельная теплоемкость, плотность, коэффициент теплового расширения есть произвольные положительные функции координаты x. Тогда уравнения связанной термоупругости примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \sigma_x = E(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha(x)\theta\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = c(x)\rho(x)\frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0\alpha(x)E(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t},$$

а граничные и начальные условия представимы в форме

$$u(0,t) = \theta(0,t) = 0,$$
$$-k(l)\frac{\partial \theta}{\partial x}(l) = q_0 H(t), \quad \sigma_x(l,t) = 0, \quad (2)$$

$$\theta(x,0) = u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0. \quad (3)$$

Будем считать, что известна дополнительная информация о торцевой температуре $\theta(l, t) = f(t)$. Цель решения обратной задачи – реконструкция одного из коэффициентов дифференциальных операторов термоупругости при известных остальных.

Сведение прямой задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма

При заданных произвольных значениях теплофизических и механических коэффициентов краевая задача (1)–(3) может быть исследована лишь численно. Для этого вначале вводятся безразмерные параметры

$$z = \frac{x}{l}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k(zl)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zl)}{c_0},$$

$$\bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(zl)}{E_0}, \quad \bar{\alpha}(z) = \frac{\alpha(zl)}{\alpha_0},$$

$$\tau = \frac{k_0 t}{c_0 \rho_0 l^2}, \quad W(z,\tau) = \frac{k_0\theta}{q_0 l}, \quad U = \frac{u}{l},$$

$$\Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}, \quad \delta = \frac{{\alpha_0}^2 T_0 E_0}{c_0 \rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{k_0}{c_0 \sqrt{E_0 \rho_0} l}.$$

После этого к полученной краевой задаче в безразмерном виде применяют преобразование Лапласа и сводят ее к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно трансформант безразмерной температуры $\widetilde{W}(z,p)$ и напряжения $\widetilde{\Omega}(z,p)$:

$$\widetilde{W}(z,p) = \int_0^1 K_1(z,\xi,p)\widetilde{W}(\xi,p)d\xi + \int_0^1 K_2(z,\xi,p)\widetilde{\Omega}(\xi,p)d\xi + f_1(z,p), \qquad (4)$$

$$\widetilde{\Omega}(z,p) = \int_0^1 K_3(z,\xi,p)\widetilde{W}(\xi,p)d\xi + \int_0^1 K_4(z,\xi,p)\widetilde{\Omega}(\xi,p)d\xi. \qquad (5)$$

Здесь

$$K_1(z,\xi,p) = -p(\bar{c}(\xi)\bar{\rho}(\xi) + \delta\bar{\alpha}^2(\xi)\bar{E}(\xi)) \int_0^{\min\{z,\eta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},$$

$$K_2(z,\xi,p) = -p\delta\bar{\alpha}(\xi) \int_0^{\min\{z,\eta\}} \frac{d\eta}{\bar{k}(\eta)},$$

$$K_3(z,\xi,p) = -\varepsilon^2 p^2 \bar{\alpha}(\xi) \int_{\min\{z,\eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta)d\eta,$$

$$K_4(z,\xi,p) = -\varepsilon^2 p^2 \frac{1}{\bar{E}(\eta)} \int_{\min\{z,\eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta)d\eta,$$

$$f_1(z,p) = -\frac{1}{p}\int_0^z \frac{dz}{\bar{k}(z)}.$$

Решение обратной задачи

Обратная задача анализируется в пространстве трансформант. На первом этапе находим начальное приближение искомого коэффициента по известным его торцевым значениям. Так, например, для удельной теплоемкости начальное приближение $\bar{c}_0(z) = \bar{c}(0)(1-z) + \bar{c}(1)z$. На втором этапе на основе метода линеаризации [1–3] строим итерационный процесс по уточнению реконструируемой функции, на каждом этапе которого необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Так, для реконструкции удельной теплоемкости при известных других коэффициентах получено уравнение

$$\int_0^1 \bar{c}_n(z)\bar{\rho}(z)\widetilde{W}_{n-1}^2(z,p)dz = \frac{1}{p^2}(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_{n-1})|_{z=1}.$$

Аналогично были получены уравнения для нахождения поправок коэффициента теплопроводности

$$\int_0^1 \bar{k}_n(z)\left(\frac{d\widetilde{W}_{n-1}}{dz}\right)^2 dz = \frac{1}{p}(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_{n-1})|_{z=1}$$

и модуля Юнга

$$\delta\int_0^1 \bar{E}_n(z)\widetilde{W}_{n-1}^2 dz = \frac{1}{p^2}(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_{n-1})|_{z=1}.$$

Решение этих уравнений является некорректной задачей, поэтому в работе для их решения применяется метод регуляризации Тихонова. Выход из итерационного процесса – по стабилизации функционала невязки

$$J_{n-1} = \int_0^\infty (\widetilde{W}_{n-1}(1,p) - \widetilde{W}_T(1,p))^2 dp.$$

Результаты вычислений

В настоящем исследовании натурный эксперимент заменен вычислительным, при этом все безразмерные коэффициенты, кроме искомого, полагались равными единице. Восстанавливались гладкие функции: степенные, тригонометрические, экспоненциальные. В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что постепенное увеличение параметра связанности δ практически не влияет на результаты реконструкции, немного увеличивая погрешность восстановления. Наибольшая погрешность восстановления удельной теплоемкости возникала в окрестности торца $z = 0$, а коэффициента теплопроводности – в окрестности $z = 1$. Монотонные функции восстанавливались гораздо лучше немонотонных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-01-00194-а.

Список литературы

1. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 222 с.

2. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном подходе к восстановлению коэффициентов переноса // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. №3. С. 39–43.

3. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2009. №3. С. 24–30.

THE PROBLEMS OF IDENTIFICATION OF INHOMOGENEOUS PROPERTIES OF THERMO-ELASTIC MEDIA

S.A. Nesterov

The problem of identification of inhomogeneous properties of thermo-elastic media is considered. The iteration algorithm, based on step-by-step solution of Fredholm integral equation of the first kind is proposed. Results of the numerical experiments are given.

Keywords: inhomogeneous rod, integral equation, thermo-elasticity.