УДК 539.319

ВЫСОКОТОЧНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ

М.А. Осипенко, Н.Ф. Таланцев

Пермский государственный технический университет

oma@theormech.pstu.ac.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Впервые за 150 лет математического исследования классической модели многолистовой рессоры (пачка балок) предложен высокоточный численный метод решения возникающей здесь контактной задачи и получен ряд новых, весьма неожиданных с точки зрения традиционных методов, картин контакта листов.

Ключевые слова: многолистовая рессора, контактная задача, высокоточный численный метод, картины контакта листов.

Введение

Многолистовые рессоры широко используются в качестве упругих элементов подвески автомобиля [1]. Простейшая модель рессоры показана на рис. 1. Эта модель исследуется уже 150 лет [2] и может быть названа классической. Рессора здесь представлена в виде пачки консольных балок (листов) Бернулли–Эйлера постоянного прямоугольного поперечного сечения. Длины и толщины листов различны, ширины одинаковы. В отсутствие нагрузки листы являются плоскими и плотно прилегают друг к другу. Трение между листами отсутствует. К свободному краю верхнего листа приложена сосредоточенная сила **P**, под действием которой листы испытывают слабый статический изгиб с возможным отставанием.

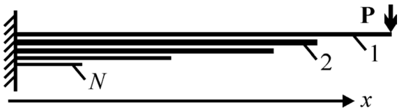

Рис. 1

Требуется найти силы взаимодействия листов. Зная их, нетрудно далее найти упругие линии листов и напряжения в листах. Несмотря на ряд попыток исследования сил взаимодействия [1–3], не был построен алгоритм отыскания сил в общем случае. Причина этого заключается в сложности возникающей здесь контактной задачи. Даже строгая постановка этой задачи (в виде, удобном для решения) сформулирована лишь недавно [4]. Ранее без ясной постановки были получены приближенные решения [1, 2] (без исследования точности приближения) и точные решения в простейших частных случаях [3] (без достаточного обоснования).

Постановка контактной задачи

При постановке задачи применим подход, изложенный в [4]. Пусть $f_k(x)$ – плотность сил взаимодействия листов с номерами k и $k+1$; $1 \le k \le$ $\le N-1$ (обозначения соответствуют рис. 1). Через $f_k(x)$ легко выразить зазоры $r_k(x)$ между упругими линиями листов. Тогда задача заключается в нахождении функций $f_k(x)$, удовлетворяющих условиям одностороннего контакта: $f_k(x) \ge 0$, $r_k(x) \ge 0, f_k(x) \Rightarrow r_k(x)$. Строгая постановка требует еще указания множества, в котором отыскиваются $f_k(x)$ [4]. Здесь заметим только, что это множество должно содержать δ-функции (сосредоточенные силы). При такой постановке легко доказывается единственность решения [4].

Численный метод решения контактной задачи

Предлагаемый численный метод основан на построенном в [4] аналитическом решении некоторого обобщения поставленной выше задачи, но для двухлистовой рессоры. Обобщение состоит в том, что на верхний лист действуют силы с произвольной заданной плотностью $p(x)$ (не обязательно одна сосредоточенная сила), а на нижний лист также действуют (направленные вверх) силы с произвольной заданной плотностью $q(x)$. Искомой является плотность $f(x)$ сил взаимодействия листов. В [4] построено аналитическое выраже-

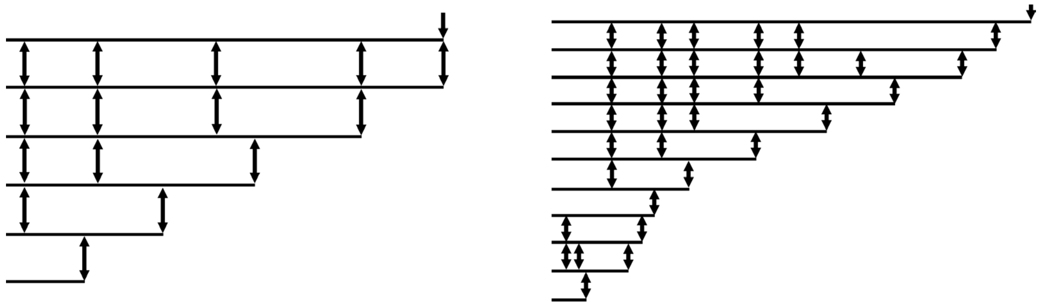

Рис. 2

ние для оператора A такого, что $f(x) = A[p(x), q(x)]$. Численный метод решения задачи для многолистовой рессоры состоит в следующем. Задается начальное приближение для $f_k(x)$: сосредоточенные силы, расположенные на свободных краях листов. Далее проводятся итерации – следующее приближение $f_k^*(x)$ вычисляется по предыдущему приближению $f_k(x)$ посредством оператора A:

$$f_k^*(x) = A[f_{k-1}(x), f_{k+1}(x)].$$

Итерации заканчиваются, когда (достаточно естественно определенное) расстояние между $f_k^*(x)$ и $f_k(x)$ достигает «машинного нуля».

Можно показать, что $f_k^*(x)$ (и, следовательно, окончательный результат) всегда есть множество сосредоточенных сил. При этом было установлено, что для обеспечения сходимости итераций следует проводить корректировку $f_k^*(x)$: если $f_k^*(x)$ содержит «близко» расположенные силы, то их следует сложить; если $f_k^*(x)$ содержит «малые» силы, то их следует отбросить (величины, определяющие «близость» и «малость», стремятся к нулю по мере сходимости итераций).

Данный метод является высокоточным в том смысле, что его погрешность определяется лишь погрешностью машинного представления чисел и выполнения арифметических операций; в нем отсутствует параметр, подобный шагу сетки, который обычно определяет погрешность численных методов.

Результаты, полученные предложенным методом

Полученное решение контактной задачи может быть (частично) представлено в виде силовой схемы рессоры. На рис. 2 представлены примеры найденных силовых схем рессор.

На этих схемах листы показаны разнесенными; длины листов и положения сил взаимодействия листов показаны в масштабе. В [1–3] отсутствуют картины расположения сил, подобные схемам на рис. 2. Вместо этого предполагается, что либо силы расположены только на свободных краях листов («метод сосредоточенной нагрузки»), либо упругие линии всех (или некоторых) листов одинаковы («метод общей кривизны»). Как видно из рис. 2, первое предположение, вообще говоря, совершенно неверно (существуют лишь некоторые частные случаи, когда оно верно). Нетрудно показать, что второе предположение верно лишь для листов одинаковой длины. В [3] рассмотрена схема трехлистовой рессоры, где имеется одна сила, расположенная не на свободном краю листа. Но этот частный результат не был использован и не получил развития в теории рессор [1].

Заключение

Предложенный численный метод решения контактной задачи об изгибе многолистовой рессоры впервые позволил получить правильную (в рамках классической модели) и, кроме того, высокоточную картину контакта листов в общем случае. Эта картина существенно отличается от «приближенных» картин, используемых в традиционных методах. Можно надеяться, что в практике расчета рессор эти методы будут заменены этим новым методом.

Список литературы

1. Пархиловский И.Г. Автомобильные листовые рессоры. М.: Машиностроение, 1978. 232 с.

2. Глух Б.А., Бидерман В.Л. Рессоры листовые. В кн.: Машиностроение. Энциклопедический справочник. Т. 2. М.: Машгиз, 1948. С. 723–739.

3. Пономарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1. М.: Машгиз, 1956. 884 с.

4. Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Рудаков Р.Н. К теории изгиба листовой рессоры // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С. 134–143.

A HIGH-PRECISION NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE CONTACT PROBLEM IN THE CLASSICAL MODEL OF THE MULTI-LEAF SPRING

M.A. Osipenko, N.F. Talantsev

For the first time during the 150 years of mathematical investigation of the multi-leaf spring classical model (the stack of beams), a high-precision numerical method for solving the occurring contact problem is proposed. This method gives a series of new leaf contact patterns that are rather unexpected from the standpoint of the conventional methods.

Keywords: multi-leaf spring, contact problem, high-precision numerical method, leaf contact patterns.