Механика деформируемого твердого тела
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1686–1688

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ШАРОВОГО ТЕЛА, ФОРМИРУЕМОГО В ПРОЦЕССЕ НЕПРЕРЫВНОГО НАРАЩИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ САМОГРАВИТАЦИИ

Д.А. Паршин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

parshin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрен квазистатический процесс послойного формирования твердого шарового тела в результате непрерывного центрально-симметричного притока разрозненных частиц самогравитирующего вещества к некоторому точечному центру. Формируемое тело считается линейно упругим, изотропным, с однородным распределением массы, но радиально-неоднородными упругими свойствами. На основании общей теории наращиваемых тел в приближении малых деформаций поставлена неклассическая начально-краевая задача механики, описывающая развитие напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела в процессе его формирования. Для двух частных случаев материальной неоднородности (постоянного модуля сдвига и постоянного модуля всестороннего сжатия) построены замкнутые аналитические решения поставленной задачи. Они проанализированы и сопоставлены с решением классической задачи теории упругости для аналогичного по размеру и свойствам самогравитирующего шара, сформированного мгновенно. Выявлены принципиальные качественные и количественные отличительные особенности напряженного состояния, приобретаемые шаровым телом вследствие его постепенного формирования в поле сил собственной гравитации.

Ключевые слова: неоднородное шаровое тело, гравитация, приток вещества, формирование, наращивание, механика наращиваемых тел, упругость, замкнутое аналитическое решение, напряженное состояние.

Рассматривается квазистатический процесс центрально-симметричного притока к некоторому точечному центру вещества, находящегося в поле сил собственной гравитации. Этот процесс обусловливает зарождение и дальнейший послойный рост твердого шарового тела, причем непрерывное включение присоединяемого вещества в состав последнего не приводит к появлению в нем отличных от нуля напряжений вблизи поверхности роста. Предполагается, что в данном процессе наращивания формируется изотропное упругое тело с однородным распределением массы, обладающее, однако, радиальной неоднородностью упругих свойств. Ставится задача исследовать процесс развития напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела во время его наращивания в приближении малых деформаций.

Отметим, что аналогичная задача о деформировании однородного упругого шарового тела, формируемого в собственном гравитационном поле, была решена в [1]. Более общая задача о наращивании однородного вязкоупругого стареющего шара в произвольном центрально-симметричном силовом поле была решена в [2]. Результаты решения некоторых других задач о наращивании деформируемых тел различной формы в полях массовых сил различной природы можно найти, например, в [3–5].

Уравнение состояния изотропного радиально-неоднородного линейно упругого тела имеет вид

$$\mathbf{T} / G(r) = 2\mathbf{E} + [\kappa(r) - 1]\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{E}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{T}$ и $\mathbf{E}$ – тензоры напряжений и малой деформации, $\mathbf{1}$ – единичный тензор; $\kappa(r) = [1 - 2\nu(r)]^{-1}$; $\nu(r)$ и $G(r)$ – коэффициент Пуассона и модуль сдвига, зависящие от радиальной координаты r.

Во всем наращиваемом теле в каждый момент времени справедливо стандартное уравнение локального равновесия

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{f}$ – вектор плотности объемных сил. В рассматриваемом случае собственного гравитационного поля шара с однородным распределением массы плотности μ имеем [6] $\mathbf{f} = -\mathbf{e}_r 2cr$, где $\mathbf{e}_r$ – орт, задающий направление из центра шара на данную точку, $c = 2/3\pi\gamma\mu^2$, γ – гравитационная постоянная.

Растущее шаровое тело непрерывно пополняется новой гравитирующей массой, оказывающей силовое воздействие на уже сформированную его часть, поэтому напряженно-деформированное состояние растущего тела в каждой точке развивается во времени даже при отсутствии реологических проявлений в механическом поведении составляющего его материала. Таким образом, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки тела, t – время. В случае упругого материала в качестве t можно, естественно, взять любой параметр, строго монотонно изменяющийся с течением времени. В силу принятых ранее предположений относительно характера роста во всех точках формируемого шара будет иметь место следующее начальное условие:

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}, \tau_*(r)) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где $\tau_*(r)$ – момент включения материального слоя радиуса r в состав растущего шара. Если $a(t)$ – радиус шара в момент времени t, то очевидно

$$a(\tau_*(r)) \equiv r. \tag{4}$$

В силу малости деформаций функции $a(t)$ и $\tau_*(r)$ считаются заданными.

Можно показать [7], что из начального условия (3) с учетом уравнения равновесия (2) и тождества (4) вытекает следующее граничное условие для скоростей изменения напряжений в точках тела, выставляемое на текущей поверхности шара – поверхности роста:

$$\mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{e}_r 2ca(t)\dot{a}(t), \quad r = a(t). \tag{5}$$

Чтобы сформулировать замкнутую начально-краевую задачу, описывающую эволюцию напряженно-деформированного состояния растущего шара, перейдем от определяющего соотношения (1) к его аналогу для скоростей: $\dot{\mathbf{T}} / G(r) = 2\mathbf{D} + [\kappa(r) - 1]\,\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}$, где $\mathbf{D} = 1/2(\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \nabla\mathbf{v})$ – тензор скоростей деформации, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – векторное поле скоростей движения частиц наращиваемого шара в процессе его деформирования. Также продифференцируем по времени уравнение равновесия (2): $\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$. Добавляя к записанным соотношениям еще условие неподвижности центральной точки шара и выведенное краевое условие на подвижной границе (5), а также начальное условие (3), приходим к следующей неклассической начально-краевой задаче:

$$\begin{gathered}
\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{T}} / G(r) = 2\mathbf{D} + [\kappa(r) - 1]\,\mathbf{1}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}, \\
\mathbf{D} = 1/2(\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} + \nabla\mathbf{v}), \quad 0 < r < a(t); \\
\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad r = 0; \quad \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{T}} = -\mathbf{e}_r 2c\,a(t)\,\dot{a}(t), \\
r = a(t); \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad t = \tau_*(r).
\end{gathered} \tag{6}$$

Далее строятся замкнутые аналитические решения поставленной задачи (6) в двух поддающихся интегрированию частных случаях неоднородности материала: 1) когда модуль сдвига G не зависит от точки формируемого тела, а вторая упругая константа меняется вдоль радиуса произвольным образом; 2) когда модуль всестороннего сжатия $K = (\kappa - 1/3)G$ не зависит от точки формируемого тела, а вторая упругая константа меняется вдоль радиуса произвольно. Анализируются свойства построенных решений. Соответствующие им распределения напряжений в сформированном к определенному моменту времени шаровом теле сопоставляются по качественным и количественным характеристикам с распределениями напряжений в мгновенно сформированном самогравитирующем шаре того же радиуса и с теми же свойствами, что и рассматриваемый постепенно сформированный путем послойного наращивания шар. Последние распределения находятся из решения классической задачи линейной теории упругости для неоднородного тела фиксированного состава.

Работа выполнена при поддержке грантом Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-3288.2010.1, РФФИ (гранты №09-08-01180-а, 09-08-01194-а, 10-01-92653-ИНД_а, 11-01-00669-а, 11-08-93967-ЮАР_а), а также Отделением энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (Программа 13 ОЭ).

Список литературы

1. Паршин Д.А. Наращивание гравитирующего упругого шара // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. IX Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рожд. акад. И.И. Воровича. Ростов-на-Дону, 11–15 октября 2005 г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР», 2005. Т. 1. С. 157–161.

2. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. №1. С. 66–83.

3. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Моделирование процессов наращивания цилиндрических тел на вращающейся оправке с учетом действия центробежных сил // Изв. РАН. МТТ. 2006. №6. С. 149–166.

4. Паршин Д.А. Проблемы наращивания упругих и вязкоупругих тел в полях массовых сил // Актуальные проблемы механики сплошной среды: Тр. Междунар. конф., посвящ. 95-летию акад. НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Цахкадзор, 25–28 сентября 2007 г. Ереван: Ереванский гос. ун-т архитектуры и строительства, 2007. С. 318–321.

5. Манжиров А.В., Паршин Д.А. Возведение тяжелого полуциркульного свода // Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела: Сб. тр. Ин-та проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН / Под ред. Р.В. Гольдштейна. М.: Наука, 2009. С. 382–421.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.

7. Манжиров А.В. Общая безинерционная начально-краевая задача для кусочно-непрерывно наращиваемого вязкоупругого стареющего тела // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 836–848.

A STRESSED STATE OF AN INHOMOGENEOUS ELASTIC SPHERICAL BODY FORMED IN THE PROCESS OF CONTINUOUS ACCRETION UNDER SELF-GRAVITY

D.A. Parshin

A quasistatic process of layerwise forming of a spherical solid due to a continuous centrally symmetric inflow of separate particles of a self-gravitating substance to a certain point center is considered. The solid being formed is considered to be linearly elastic, isotropic, with uniformly distributed mass but with radially non-uniform elastic properties. On the basis of the general theory of accreted solid mechanics in small strain approximation, a non-classical initial-boundary value problem that describes the development of stress-strain state of the solid under consideration during the process of its forming is formulatesd. Closed analytical solutions of the problem are constructed for two particular cases of material inhomogeneity: for the case of shear modulus constancy and for the case of compression modulus constancy. The constructed solutions are analyzed and compared with the solution of the classical elasticity theory problem formulated for an instantly formed self-gravitating spherical solid similar to the accreted one in size and properties. Fundamental quantitative and qualitative peculiarities of the stress-strain state which are inherent for a spherical body gradually formed in the field of self-gravitation are revealed.

Keywords: inhomogeneous spherical solid, gravitation, substance inflow, forming, accretion, accreted solid mechanics, elasticity, closed analytical solution, stress state.