УДК 539.3

РАСЧЕТ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

***А.Н. Петров*[1], *М.Д. Ермолаев*[2]**

[1]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
[2]НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

belov_a2@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлена гранично-элементная (ГЭ) методика на основе метода квадратур сверток и интегрального преобразования Лапласа для решения трехмерных задач динамики вязкоупругих составных тел при смешанных краевых условиях.

Ключевые слова: граничный элемент, граничные интегральные уравнения, численное обращение интегрального преобразования, составные тела.

Рассматривается кусочно-однородное тело. Предполагается, что каждая составная часть является изотропной вязкоупругой. Динамическое состояние однородной части тела описывается соответствующим дифференциальным уравнением Ламе в перемещениях. Используются функции памяти классических вязкоупругих моделей (Максвелла, Кельвина – Фойгта, стандартного вязкоупругого тела) и физические соотношения со слабосингулярным ядром памяти. Рассматриваются смешанные граничные условия и условия жесткого контакта на внутренних границах. Интегральные представления строятся не только во времени, но и в терминах преобразования Лапласа с комплексным параметром. Используются обобщенные формулы Сомильяны во времени и в изображениях по Лапласу, которые дают возможность построить гранично-временные интегральные уравнения (ГВИУ) и граничные интегральные уравнении (ГИУ) [1]. ГВИУ являются уравнениями Вольтерра по времени, поэтому при построении шаговых схем необходимо использовать сплайн-аппроксимацию по переменной времени. В этом заключается один из основных ГЭ-подходов для решения таких ГВИУ. Но, кроме того, ГВИУ являются интегралом свертки по времени, что определяет разработанный подход – построение квадратурных формул численного интегрирования для интегралов свертки. Сочетание ГИУ и ГВИУ с контактными условиями дает ГИУ и ГВИУ для кусочно-однородных тел.

Особое внимание уделено проблеме построения модификации метода квадратур сверток. Строятся комбинированные формулы метода [2]. Возможности таких формул продемонстрированы на численных примерах. На рис. 1 представлены оригиналы искомых функций для следующих параметров схемы: $N = 500$, $\Delta t = 0.01$, $L = 501$. Цифрой *1* обозначена кривая, построенная по традиционной формуле метода квадратур сверток, цифрами *2* и *3* – кривые, построенные по результатам применения модификации метода с линейным и квадратичным интерполированием базовой функции. Применение метода квадратур сверток с переменным шагом при линейной интерполяции подынтегральной функции не позволяет решить проблему устойчивости численного построения искомой функции на выбранном временном интервале без измельчения расчетной сетки.

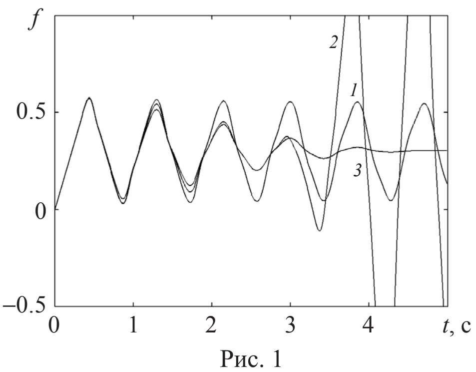

Рис. 1

На рис. 2 показано возникновение численных осцилляций при следующих параметрах схемы: $N = 500$, $\Delta t = 0.01$ и использовании равномерных сеток на интервалах $\varphi \in [0, \pi/2], [\pi/2, 3\pi/2], [3\pi/2, 2\pi]$ из расчета выбора соответственно $L_1 = 125$, $L_2 = 21$ и $L_3 = 125$.

Применение комбинированных формул позволяет получить искомый результат на той же сетке (гладкая кривая на рис. 2). Кривые по фор-

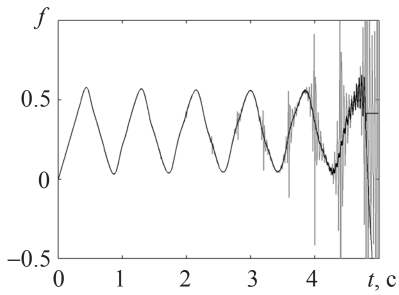

Рис. 2

мулам неразличимы.

Построение модификаций метода квадратур сверток на основе комбинированных формул дает возможность преодолеть такие ограничения традиционного подхода, как выбор числа шагов по времени, совпадающим с числом узлов по углу. Использование модификаций позволяет сократить необходимое число точек разбиения для достижения заданной точности. В рассмотренном примере удалось понизить число точек в 2 раза, а при уменьшении шага по времени число точек еще более сократится, т.к. информативная часть базовой функции при уменьшении шага по времени будет уплотняться к нулевой точке.

Приведены результаты решений тестовых задач. Рассмотрена задача о сферической полости в безграничной вязкоупругой среде. Рассмотрена задача о действии силы на торец составного призматического тела $P(t) = 1_+(t)$ Н/м^2, где $1_+(t)$ – правосторонняя функция Хевисайда. Составное призматическое тело имеет жестко закрепленный торец (рис. 3). Рассматриваются подобласти с одинаковыми параметрами материала: $E = 2.11$ Н/м^2; $\nu = 0$; $\rho = 7850$ кг/м^3; $\lambda = 0$; $\mu = 1.055 \cdot 10^{11}$ Н/м^2. Каждая из подобластей содержит по 72 элемента и 88 точек на четверти сетки.

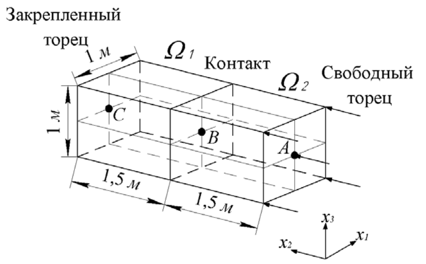

Рис. 3

На рис. 4, 5 приведены перемещения и напряжения, возникающие в области контакта. Цифрами *1* обозначено решение с использованием метода квадратур сверток, цифрами *2* – с использованием метода Дурбина, штриховыми линиями – аналитическое решение.

Проведены расчеты с учетом вязкоупругих

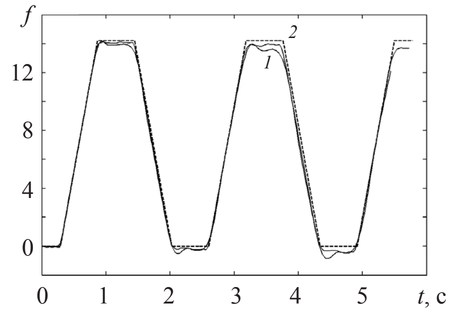

Рис. 4

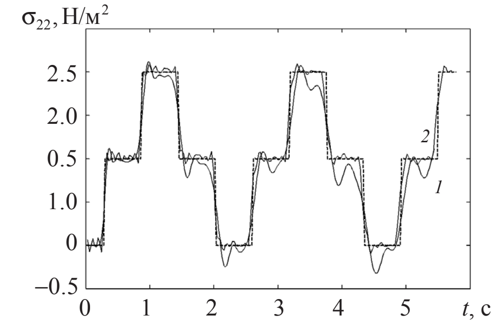

Рис. 5

свойств материала. Численно продемонстрировано влияние разномодульности подобластей на волновые поля перемещений и напряжений. Увеличение жесткости второй подобласти приводит к следующему: изменение формы отклика перемещений в точке *A* – появление временных отрезков с менее резким изменением амплитуды перемещений; существенное изменение формы отклика напряжений в точке *C* – исчезновение участков постоянных значений напряжений и т.д. Приведено численное решение задачи о штампе на полупространстве. Действует вертикальная сила на деформируемый штамп, расположенный на полупространстве.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК №2222), при поддержке РФФИ (проект №10-08-01017-а), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.

Список литературы

1. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

2. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций. Н.Новгород: ННГУ, 2009. 180 с.

BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF COMPOSITE VISCOELASTIC BODIES

A.N. Petrov, M.D. Yermolayev

A boundary-element (BE) methodology based on the convolution quadrature method and the integral Laplace transform for analyzing 3D dynamic problems of viscoelastic composite bodies with mixed boundary conditions is presented.

Keywords: boundary element, boundary integral equations, numerical inversion of integral transformation, composite bodies.