УДК 539.3

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ШТАМПОВ НА УПРУГОМ СЛОЕ

И.М. Пешхоев

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

peshkhoev@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Для задачи о двух жестких симметричных эллиптических в плане штампах, внедренных в толстый упругий слой на заданную величину перемещения, строится асимптотика функции концентрации напряжений под подошвой штампа по двум параметрам: относительного расстояния между центрами штампов и относительной толщины слоя. Рассмотрены два случая краевых условий: слой на жестком основании без трения и нижняя плоскость слоя жестко связана с основанием. Проведен анализ полученных решений при различных значениях указанных параметров.

Ключевые слова: упругий слой, эллиптический штамп, асимптотическое решение, функция концентрации напряжений.

1. Рассматривается задача об исследовании концентрации напряжений, обусловленной влиянием системы двух одинаковых жестких эллиптических в плане штампов на упругий слой, который: а) опирается без трения на жесткое основание или б) нижняя плоскость которого жестко связана с основанием.

Пусть жесткие плоские штампы, занимающие в плане область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$,

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ (x,y), \frac{(x+2l)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}, \quad b > a,$$

внедряются в упругий слой толщиной h на глубину γ. Предполагается, что трение между подошвами штампов и поверхностью основания отсутствует. Тогда для определения напряжений под штампами имеем интегральное уравнение [1] по составной области $\Omega_1 \cup \Omega_2$, левая часть которого с учетом симметрии преобразуется в интеграл по эллиптической области Ω_1:

$$\iint\limits_{\Omega_1} q(\xi,\eta)\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R_l} - \frac{1}{h}F\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{1}{h}F\left(\frac{R_l}{h}\right)\right] d\xi d\eta =$$

$$= -2\pi\Delta\gamma, \quad \Delta = \frac{G}{1-\nu}, \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$R_l = \sqrt{(x+\xi+2l)^2 + (y-\eta)^2},$$

$$F(t) = \int\limits_0^\infty [1 - L(u)]\, J_0(ut)\, du. \qquad (1)$$

Здесь G – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, $J_n(t)$ – функция Бесселя первого рода, а функция $L(u)$ для случаев а) и б) соответственно равна [1]:

$$\text{а)}\ L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u},$$

$$\text{б)}\ L(u) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\kappa \operatorname{ch} 2u + 1 + \kappa^2 + 4u^2}, \quad \kappa = 4 - 3\nu.$$

2. Для решения задачи применим метод «больших λ» [1]. Регулярную часть ядра уравнения (1) разложим по отрицательным степеням параметров $\lambda_1 = l/a$, $\lambda_2 = h/a$ [2], а искомую функцию представим в виде:

$$q(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_{ij}(x,y)}{\lambda_1^i \lambda_2^j}. \qquad (2)$$

Подставляя полученные разложения в уравнение (1), получим систему интегральных уравнений, последовательно решая которые по методике [1], находим коэффициенты (2):

$$q(x,y) = q_{0,0}(x,y) N(x,y,\lambda_1,\lambda_2),$$

$$q_{0,0}(x,y) = -\frac{\Delta\gamma}{aK}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}, \qquad (3)$$

$$N(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = 1 - \frac{b}{2aK\lambda_1} + \frac{b\tilde{N}_1}{aK\lambda_2} + \frac{b}{4a^2\lambda_1^2} \times$$

$$\times \left[\frac{b}{K^2} + \frac{e^2 x}{E - (1-e^2)K}\right] - \frac{b^2\tilde{N}_1}{a^2K^2\lambda_1\lambda_2} +$$

$$+ \frac{b}{a^2\lambda_2^2}\left[\frac{b\tilde{N}_1^2}{K^2} - \frac{e^2 x \tilde{N}_2}{E - (1-e^2)K}\right],$$

$$C_1 = \int_0^\infty [1 - L(u)][1 + J_0(2u\lambda_1/\lambda_2)]du,$$

$$C_2 = \int_0^\infty [1 - L(u)]uJ_1(2u\lambda_1/\lambda_2)du,$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

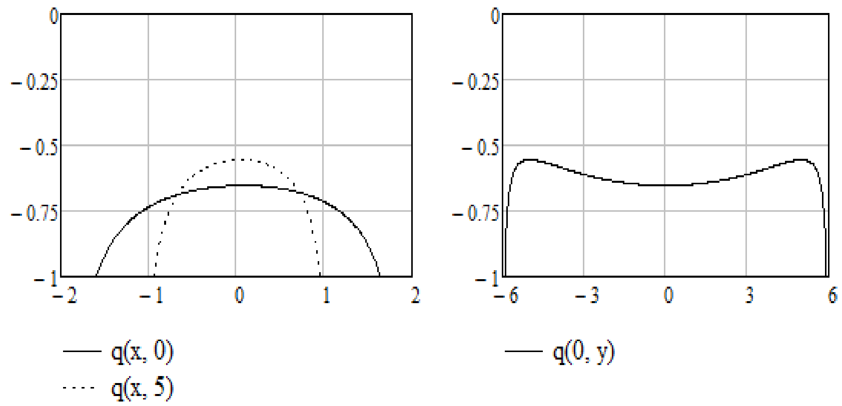
$$e = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}.$$

Отметим, что невыписанные здесь из-за громоздкости члены разложения функции $N(x, y, \lambda_1, \lambda_2)$ содержат степени $\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}$ для $3 \le i + j \le 4$, коэффициенты при которых являются четными по y.

Таким образом, решение задачи является четным по y. При $\lambda_1 \to \infty$, $\lambda_2 \to \infty$ из (3) получаем решение задачи для одного плоского эллиптического штампа на полупространстве [1] при заданном поступательном перемещении γ; при $\lambda_1 = \text{const}$, $\lambda_2 \to \infty$ имеем асимптотическое решение задачи для двух штампов на полупространстве [3], а при $\lambda_2 = \text{const}$, $\lambda_1 \to \infty$ – асимптотическое решение задачи для одного штампа на слое [1].

3. Эффективность асимптотики оценивалась вычислением невязки интегрального уравнения (1). Анализ результатов показал, что эффективность данной асимптотики зависит не только от значений параметров λ_1 и λ_2, но и от формы штампов – параметра $r = b/a$. При $\lambda_1 = \lambda_2 = r = 2$ невязка составляет 5%, при уменьшении параметров λ_1 или λ_2 и увеличении r невязка растет.

Проведенные расчеты и анализ графиков функции напряжений под подошвой штампа показали, что слой с жестко связанной с основанием нижней плоскостью увеличивает концентрацию напряжений под штампом по сравнению со слоем, опирающимся на основание без трения. При близко расположенных штампах ($\lambda_1 \le 2.5$) и достаточно толстом слое ($\lambda_2 \ge 10$) взаимодействие штампов проявляется в заметном уменьшении концентрации напряжений под той частью подошвы штампа, которая ближе ко второму штампу. Это явление для двух штампов на полупространстве было отмечено в [3]. Для удлиненных штампов ($r \ge 3$) при их близком положении на конечном слое ($\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx 2$) взаимодействие штампов со слоем проявляется в том, что функция напряжений имеет локальный максимум под центром симметрии штампа и два локальных минимума, расположенных симметрично около самых удаленных от центра точек границы эллиптической области. На рис. 1 приведены графики функции концентрации напряжений $q(x, y)$, поделенные на множитель $\Delta\gamma$, для случая жестко связанного с основанием слоя при следующих значениях параметров: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ и $r = 3$, при фиксированных значениях одной переменной (на рис. 1*а* сплошная кривая соответствует $q(x, 0)$, штриховая – $q(x, 5)$, на рис. 1*б* сплошная кривая соответсвует $q(0, y)$).



а) *б)*

Рис. 1

Автор благодарит профессора Б.В. Соболя за постановку задачи и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-08-00839-а).

Список литературы

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

2. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 224 с.

3. Соболь Б.В. Контакт двух плоских симметричных штампов с упругим основанием // Численные и аналитические методы решения задач строительной механики и теории упругости. Ростов-на-Дону. 1995.

ON THE INTERACTION OF TWO ELLIPTIC STAMPS ON AN ELASTIC LAYER

I.M. Peshkhoyev

The problem of embedding of two rigid symmetric elliptic stamps into a thick elastic layer to a given depth is considered. The asymptotics of the stress concentration function is constructed under the base of the stamp. It depends on two parameters: the relative distance between the centers of the stamps and the relative thickness of the layer. Two types of boundary conditions are considered: a layer on a rigid base without friction, and the lower plane of the layer is rigidly connected to the base. The analysis of the solutions obtained is carried out for the different values of the parameters mentioned.

Keywords: elastic layer, elliptical stamp, asymptotic solution, function of stress concentration.