

УДК 539.3

## ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ, НАГРЕВАЕМОМ ТОЧЕЧНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

© 2011 г.

*В.А. Пинскер*

Всероссийский научно-исследовательский институт электромеханики, Москва

Victorp2009@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Дано точное аналитическое решение квазистатической задачи несвязанной термоупругости в однородном и изотропном линейно-упругом полупространстве, нагреваемом непрерывным поверхностным точечным источником тепла постоянной мощности. Для любых значений коэффициента Пуассона в интегральной форме получено общее автомодельное решение.

*Ключевые слова:* точечный источник, вращательная симметрия, автомодельность, термоупругая задача, пересекающиеся изобары.

Рассмотрена нестационарная осесимметричная задача о квазистатических полях несвязанных термических напряжений в однородном и изотропном линейно-упругом полупространстве, нагреваемом непрерывно действующим точечным источником тепла постоянной интенсивности, расположенным на его поверхности, при произвольных значениях коэффициента Пуассона  $-1 \leq \nu \leq 1/2$ . Граница полупространства считается теплоизолированной и свободной от нормальных и касательных напряжений. Внутренние массовые силы отсутствуют.

Введем цилиндрическую систему координат  $Orz$ , в которой радиальная ось  $r$  лежит на поверхности полуограниченного тела; ось  $z$  направлена по нормали к ней вглубь полупространства, а начало координат (точка  $O$ ) совпадает с источником тепла мощности  $Q$ , начинающим действовать в момент времени  $t = 0$ . Теплофизические и упругие характеристики среды не зависят от температуры.

Прежде всего заметим, что в постановке задачи отсутствуют характерные линейные размеры, так что термоупругие поля (как, впрочем, и температура) будут выражаться через две автомодельные переменные

$$\rho = \frac{r}{2\sqrt{at}} \quad \text{и} \quad x = \frac{z}{2\sqrt{at}},$$

где  $a$  – температуропроводность материала. Распределение тепла от точечного поверхностного источника в полуограниченном теле обладает сферической симметрией и хорошо известно из литературы.

Переходим к решению соответствующей ква-

зистатической задачи несвязанной термоупругости. При помощи потенциала Гудьера и функции Лява построены точные аналитические выражения для всех компонент поля термических напряжений (осевой  $p_{xx}$ , сдвиговой  $p_{rx}$ , радиальной  $p_{rr}$  и окружной  $p_{\varphi\varphi}$ ) в интегральном виде. Исследованы их пространственные распределения и закономерности развития с течением времени. Показано, что для  $p_{xx}$  и  $p_{rx}$  значение  $\nu$  определяет лишь величину масштабного коэффициента. В явном виде получены нестационарные значения всех компонент напряжений на поверхности полупространства и на оси симметрии. Изучены асимптотики найденных формул при малых и больших значениях автомодельных переменных. Заметим, что радиальная и окружная компоненты имеют особенность в точке нагрева. Обнаруженная неоднозначность окружного напряжения в начале координат является неустранимым дефектом модели точечного источника тепла.

Теоретически установлено, что для осевого, радиального и окружного напряжений линией экстремумов является ось симметрии, а для осевого напряжения плоскостью экстремумов является свободная поверхность. Найденны максимальные значения всех компонент термоупругого поля при различных значениях коэффициента Пуассона и определены координаты этих максимумов. Показано, что на оси симметрии возможно только осевое растяжение, а на границе полупространства – только радиальное сжатие и окружное растяжение. Обнаружено неочевидное свойство независимости от коэффициента Пуассона разности радиального и окружного напряжений на свободной поверхности [1].

Как для стационарного, так и для нестационарного режимов нагрева построены поля изобар и проанализирован характер их развития. Определены координаты изобар нулевых напряжений, разделяющих области растяжения и сжатия в нагреваемом полупространстве и продемонстрирована эволюция их формы в зависимости от изменения величины  $\nu$ . Показано, что для радиальной и окружной компонент при  $\nu \geq -0.19$  эти разделительные изобары состоят из двух ветвей. Аналитически рассчитаны уравнения асимптот для указанных нулевых изобар всех компонент вдали от источника нагрева [2].

Установлено, что для радиальной и окружной компонент на оси симметрии в диапазоне  $-1 \leq \nu \leq -0.325$  имеет место монотонный рост их значения от  $-\infty$  до 0 по мере удаления от источника тепла; при  $\nu = -0.325$  в области сжатия формируется плато  $p_{pp} = p_{\phi\phi} = -0.0036$  с последующим образованием локальных экстремумов, а при  $\nu = -0.19$  впервые появляются растягивающие напряжения, максимальная величина которых растет с дальнейшим увеличением коэффициента Пуассона вплоть до  $\nu = 1/2$ .

Построены точные математические выражения для нулевых асимптот радиального и окружного напряжений, анализ которых показывает, что при  $-1 \leq \nu \leq -0.7$  в полупространстве возможно только радиальное сжатие. Растяжение появляется впервые при  $\nu = -0.7$ , на линии  $x = \sqrt{3/2}\rho \approx 1.2247\rho$ , при  $\rho \rightarrow \infty$ ; далее, по мере роста  $\nu$ , точка максимума радиального растяжения постепенно приближается к оси симметрии, при  $\nu = 0.06$  выходит на эту ось и затем вплоть до  $\nu = 1/2$  смещается по оси в сторону источника тепла; при этом значение максимального растяжения монотонно возрастает [3].

Что касается окружной компоненты, то при больших значениях коэффициента Пуассона у нее появляется дополнительный максимум растяжений вне начала координат. Впервые возникая при  $\nu = 0.3957$ , он монотонно увеличивается по мере роста  $\nu$ , перемещаясь на поле координат по дугообразной траектории, и при  $\nu = 0.4468$  выходит на ось симметрии, причем здесь его величина достигает величины  $p_{\phi\phi}$  непосредственно на самом источнике тепла. С дальнейшим возрастанием  $\nu$  точка абсолютного максимума, скачком переместившаяся из начала координат на ось симметрии, снова приближается к источнику тепла, при этом значение максимума растяжения растет и далее вплоть до  $\nu = 1/2$ .

Как для радиальной, так и для окружной компонент доказано существование поверхностей вращения, вдоль которых у каждой из них исче-

зает зависимость от коэффициента Пуассона, т.е. все изобары, имеющие произвольные значения  $\nu$ , будут проходить через определенную линию на этой поверхности, соответствующую заданному уровню напряжения. Рассчитаны максимальные и минимальные координаты этих поверхностей пересечений изобар для обеих компонент и в неявном виде определена их форма. Обе они начинаются на оси симметрии в точке, лежащей на глубине  $x = 0.402$ , при значениях компонент  $p_{pp} = p_{\phi\phi} = -0.718$ , т.е. в области сжатия, и заканчиваются на бесконечном удалении от источника тепла при нулевых напряжениях. Однако, если поверхность пересечений радиальной компоненты целиком лежит в области отрицательных напряжений, то аналогичная поверхность окружной компоненты имеет участки как растяжения (вплоть до  $p_{\phi\phi} = 0.069$ ), так и сжатия, разделенные границей  $\rho = 0.703$ ,  $x = 0.46$ . Проекции этих поверхностей на координатную плоскость имеют асимптоты:  $x = \sqrt{\sqrt{51} - 7}\rho \approx 0.3761$  для радиальной компоненты и  $x = \sqrt{2}\rho$  для окружной.

Показано, что стационарное термоупругое поле допускает нормировку, позволяющую свести всю совокупность изобар к единственной изобаре в случае как радиального, так и окружного напряжений. Определены аналитические выражения для указанных нормализованных изобар. Сделаны оценки скорости установления стационарного режима в зависимости от величины  $\nu$ .

Аналитически рассчитан нестационарный профиль свободной поверхности нагреваемого полуограниченного тела, возникающий вследствие термических деформаций, и определены его асимптотические приближения при малых и больших значениях радиальной координаты.

Рассмотрены вопросы, связанные с возможным развитием тепловых разрушений в полупространстве. В соответствии с проведенными расчетами построены многочисленные графические зависимости, наглядно иллюстрирующие развитие во времени и распределение в полупространстве термоупругих полей.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании разрушения и трещинообразования в хрупких материалах под действием термических напряжений, вызванных поверхностным нагревом, например при сварке, сверлении, лазерном упрочнении, термобурении горных пород и, кроме того, могут оказаться весьма полезными при изучении термических деформаций элементов лазерной оптики.

Укажем также, что в силу линейности рассмотренной задачи, построенное решение будет

являться асимптотическим приближением для решений множества других более сложных задач о поверхностном нагреве полугограниченных тел непрерывно действующими источниками тепла с произвольным распределением интенсивности при условии значительного удаления от области нагрева.

*Список литературы*

1. Пинскер В.А. // Труды 6 Минского Междунар. форума по тепло- и массообмену. 2008. С 3–17.
2. Goldstein R.V., Pinsker V.A. // Proc. of the 8<sup>th</sup> International Congress on Thermal Stresses. 2009. V. 1.
3. Пинскер В.А. // Труды V Российской национальной конф. по теплообмену. 2010. Т. 7. С. 161–165.

**THERMAL STRESSES IN A SEMI-BOUNDED ELASTIC SOLID DUE TO SURFACE POINT-LIKE HEAT SOURCE**

*V.A. Pinsker*

An exact analytical solution is given for an uncoupled quasi-steady thermoelastic problem in a homogeneous and isotropic linear-elastic half-space, heated by a continuous point-like surface heat source of constant intensity. The general self-similar solution was obtained in integral form for any values of Poisson's ratio.

*Keywords:* point source, rotational symmetry, self similarity, thermoelastic problem, intersecting isobars.