

УДК 539.376

## ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ МИКРОНЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2011 г.

Н.Н. Попов, Л.В. Коваленко

Самарский государственный технический университет

ponick25@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Дана постановка и приведено решение нелинейной стохастической краевой задачи ползучести при условии, что упругие деформации малы и ими допустимо пренебречь. Определяющие соотношения ползучести, взятые в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, сформулированы в стохастической форме. При помощи метода возмущений нелинейная стохастическая задача сводится к системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно флуктуаций тензора напряжений. Решение линеаризованной задачи получено в виде суммы двух рядов. Первый ряд задает решение вдали от границы тела без учета краевых эффектов, второй ряд представляет собой решение в пограничном слое, его члены быстро затухают по мере удаления от границы тела. На основе полученного решения проведен статистический анализ случайного поля напряжений вблизи границы тела. Показано, что разброс напряжений в поверхностном слое, ширина которого зависит от степени неоднородности материала, может быть намного больше, чем для глубинных слоев.

*Ключевые слова:* установившаяся ползучесть, стохастическая краевая задача, случайное поле напряжений, метод возмущений, краевой эффект.

Современное машиностроение предъявляет повышенные требования к надежности и прочности элементов конструкций, что приводит к необходимости создания новых методов расчета, наиболее полно и адекватно описывающих свойства реальных материалов. Все реально существующие твердые материалы и тела обладают определенной структурной неоднородностью. Структурная неоднородность материала существенно влияет на процесс деформирования и разрушения твердых тел, вызывая ряд механических эффектов. Учет структурной неоднородности материала приобретает особую важность для элементов конструкций, работающих в условиях ползучести, поскольку известно, что опытные данные по деформации ползучести, полученные при испытаниях на стандартных образцах, имеют значительный разброс.

Одним из возможных подходов к исследованию процессов деформирования тел со структурной неоднородностью является вероятностно-статистический. Здесь за основу принимается классическая модель сплошной среды, при этом стохастичность вводится в обычные детерминированные определяющие уравнения посредством случайных функций, соответствующих механическим характеристикам материала.

Приводится решение пространственной стохастической краевой задачи установившейся пол-

зучести при условии, что упругие деформации малы и ими допустимо пренебречь. Материал твердого тела считается стохастически неоднородным, так что компоненты тензора напряжений и скоростей деформаций являются случайными функциями координат.

Пусть компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций  $\dot{p}_{ij}$  – условиям

$$\Lambda_{ijk} \Lambda_{lmn} \dot{p}_{km,jn} = 0, \quad (2)$$

которые получаются из уравнений совместности для деформаций ползучести путем дифференцирования по времени ( $\Lambda_{ijk}$  – единичный антисимметричный псевдотензор). По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Уравнения (1) и (2) замыкаются определяющими соотношениями ползучести, которые взяты в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме [1]

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n+1} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mn} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2, x_3)),$$

где  $s$  – интенсивность напряжений:

$$s^2 = 0.5(3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}),$$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $U(x_1, x_2, x_3)$  – случайная однородная функция, описывающая реологичес-

кие свойства материала с математическим ожиданием  $\langle U \rangle = 0$  и дисперсией  $\langle U^2 \rangle = 1$ ;  $\alpha$  – число, играющее роль коэффициента вариации реологических свойств;  $c$ ,  $n$  – постоянные материала. На поверхности тела  $S$  заданы детерминированные поверхностные силы  $q_i$ :

$$\sigma_{ij} n_j = q_i, \quad x \in S,$$

где  $n_i$  – компоненты единичного вектора нормали к поверхности  $S$ .

Предполагается, что однородная функция  $U(x_1, x_2, x_3)$ , с помощью которой задается случайное поле возмущений реологических свойств материала, является почти периодической быстроосциллирующей функцией координат [2]:

$$U(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} \cos(\omega \beta_s^{(k)} x_s + \varphi^{(k)}),$$

где  $\omega$  – большой параметр, имеющий размерность, обратную длине;  $\beta_s^{(k)}$  – безразмерные величины порядка единицы;  $A^{(k)}$ ,  $\varphi^{(k)}$  – некоррелированные случайные величины, причем  $\varphi^{(k)}$  имеет равномерное распределение на интервале  $(0, 2\pi)$ .

При помощи метода возмущений нелинейная стохастическая задача сводится к системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно флуктуаций тензора напряжений. Решение линеаризованной задачи получено в виде суммы двух рядов. Первый ряд задает решение вдали от границы тела без учета краевых эффектов, второй ряд представляет собой решение в пограничном слое, его члены быстро затухают по мере удаления от границы тела. В качестве примера рассмотрено растяжение стохастически неоднородного полупространства в направлении двух осей.

По аналогичной схеме решена двумерная стохастическая нелинейная краевая задача установившейся ползучести для плоского напряженного состояния. Разработан приближенный метод решения нелинейной краевой задачи о всесторон-

нем растяжении усилиями  $p$  бесконечной пластины из стохастически неоднородного материала, ослабленной круговым отверстием. Задача рассматривалась в полярной системе координат для случая плоского напряженного состояния, в предположении, что стохастические свойства материала описываются при помощи случайной однородной функции одной переменной (радиуса).

На основе полученных аналитических решений проведен статистический анализ случайных полей напряжений, в результате которого установлено, что вблизи границ тел существует узкий пограничный слой, в котором напряженно-деформированное состояние отлично от напряженно-деформированного состояния вдали от границы тела.

Получено, что в условиях ползучести концентрация напряжения на границе тела, возникающая за счет неоднородности материала, в два и более раза больше, чем на бесконечности, в зависимости от параметра нагружения и степени нелинейности материала. Показано, что разброс напряжений в пограничном слое может быть намного больше, чем для глубинных слоев, причем ширина этого слоя зависит от степени неоднородности материала и от параметров нагружения.

Таким образом, флуктуации напряжений в пограничном слое играют существенную роль, и их необходимо учитывать при решении вопроса о надежности элементов конструкций, работающих в условиях ползучести.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-01-00644-а.*

#### Список литературы

1. Попов Н.Н., Самарин Ю.П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ. 1985. №2. С. 150–155.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976. 368 с.

### THE INVESTIGATION OF RANDOM STRESS FIELDS AROUND THE BOUNDARY OF MICROSCOPICALLY HETEROGENEOUS SOLID UNDER CREEPAGE

*N.N. Popov, L.V. Kovalenko*

The formulation and the solution of a nonlinear stochastic boundary-value problem of creep under the condition that the elastic deformations are small and can be neglected, is given. Defining relations for creep, taken in accordance with the nonlinear theory of viscous flow, were formulated in a stochastic form. Nonlinear stochastic problem is reduced to a system of linear differential equations in partial derivatives with respect to fluctuations of the stress tensor according to the perturbation method. The solution of the linearized problem is obtained as the sum of two series. The first series gives the solution away from the border the body without edge effects, the second one represents the solution of the boundary layer, members of this series are quickly exhausted on the distance from the boundary. Based on this decision, the statistical analysis of random stress field near the boundaries was carried out. It is shown that the spread of stress in the surface layer, whose width depends on the degree of heterogeneity of the material, may be much greater than for the deep layers.

*Keywords:* steady creep, stochastically boundary problem, random field of stresses, perturbation theory, boundary effect.