УДК 539.374

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА РАСЧЕТА ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК В ЗАДАЧЕ О РАСТЯЖЕНИИ С КРУЧЕНИЕМ ОДНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

В.В. Привалова

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

valentprival@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложена численная процедура расчета предельных значений нагрузок, действующих на дискретные градиентные механические системы, часть элементов которых может работать уже на стадии разупрочнения. Методику иллюстрирует задача о растяжении с кручением в одной стержневой системе специального образца из нелинейного материала, свойства которого определяет невыпуклый потенциал, описывающий как устойчивые состояния материала (упрочнение), так и неустойчивые (разупрочнение). Изложенная вычислительная схема позволяет избежать решения нелинейных уравнений равновесия при постепенном возрастании нагрузок и оценки устойчивости каждого такого положения равновесия с целью выявления значений нагрузок, приводящих систему к катастрофе.

Ключевые слова: градиентная система, разупрочнение, сепаратриса, катастрофа, матрица Гессе, предельные параметры управления.

Введение

Разрушение механических систем есть явление подобное явлению невозможности равновесия [1], то есть разрушение связано с потерей устойчивости процесса деформирования. Если механическая система градиентна, то ее поведение описывается потенциальной функцией [2, 3]. Потеря устойчивости деформирования этих систем определяется вырожденными критическими точками их потенциальных функций, которые в пространстве управления задают сепаратрисы таких функций. Известно [1, 2], что потеря устойчивости происходит тогда, когда путь нагружения в пространстве управлений выходит из области, ограниченной сепаратрисой. Отсюда для нахождения предельных значений параметров управления необходимо знать сепаратрису потенциальной функции.

Механическая система

Исследована стержневая система (рис. 1). Стержни *1* и *2* выполнены из линейно упругого материала. Стержень *1* передает на образец *3* растягивающую нагрузку. Жесткость стержня *1* при растяжении равна λ_1. Стержень *2* передает на образец закручивающий момент. Жесткость стержня *2* при кручении – λ_2. Полый образец *3* имеет такую геометрию, что удлинение по величине равно деформации растяжения ε, угол закручивания – деформации сдвига γ, растягивающая сила – растягивающему напряжению σ, а крутящий момент – касательному напряжению τ.

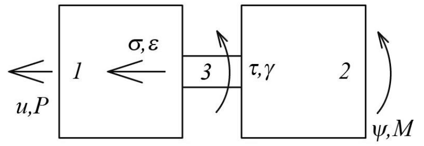

Рис. 1

Свойства материала образца при растяжении с кручением заданы в общем случае невыпуклым потенциалом [4]:

$$\Pi(\varepsilon,\gamma)=\begin{cases}0.25[E\varepsilon^2+G\gamma^2+a^{-1}\sin(a(E\varepsilon^2+G\gamma^2))],\\ \quad(\varepsilon,\gamma)\in\Omega;\\ 2.5\cdot10^{-3}E,\quad(\varepsilon,\gamma)\notin\Omega,\end{cases}$$

где $E = 2\cdot10^4$ кГ/мм², $G = 7.7\cdot10^3$ кГ/мм², $a = 100\pi/E$, $\Omega=\{\varepsilon,\gamma\geq0,\ E\varepsilon^2+G\gamma^2\leq\pi a^{-1}\}$. Нагружение системы ведется посредством монотонно возрастающих кинематических и силовых параметров (u,ψ,P,M). В этом случае данная стержневая конструкция относится к классу градиентных систем.

Сепаратриса и предельные значения параметров управления при жестком, мягком и смешанном нагружении

При жестком нагружении состояние механической системы описывает потенциальная функция

$$W_1^* = 0.5\lambda_1(u - \varepsilon l)^2 + 0.5\lambda_2(\psi - \gamma l r^{-1})^2 + \\ + \Pi(\varepsilon, \gamma) S l,$$

где первые два слагаемых – потенциальные энергии упругих деформаций стержней *1* и *2*; l – длина образца *3*; S – площадь его поперечного сечения; r – радиус средней линии поперечного сечения. Параметры l, r, S будем опускать, как равные единице [4], и, не нарушая сути дела, считать все величины безразмерными. Тогда потенциальную функцию запишем в виде

$$W_1 = 0.5\lambda_1(u - \varepsilon)^2 + 0.5\lambda_2(\psi - \gamma)^2 + \Pi(\varepsilon, \gamma).$$

Здесь u, ψ параметры управления; ε, γ – параметры состояния системы. Величины λ_1 и λ_2 фиксируем ($\lambda_1 = 500$ кГ/мм, $\lambda_2 = 500$ кГ/мм). Критические точки функции W_1 есть решения системы уравнений равновесия

$$\frac{\partial W_1}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} - \lambda_1(u - \varepsilon) = 0,$$
$$\frac{\partial W_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} - \lambda_2(\psi - \gamma) = 0.$$

Отсюда

$$u = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon} + \varepsilon, \quad \psi = \frac{1}{\lambda_2}\frac{\partial \Pi}{\partial \gamma} + \gamma. \tag{1}$$

Вырожденные критические точки, образующие в пространстве управлений сепаратрису, обращают в нуль детерминант матрицы Гессе функции W_1 (матрицы вторых производных). Приближенные значения координат вырожденных критических точек определяли следующим образом. Взяли на множестве $\{\varepsilon, \gamma \geq 0\}$ прямоугольник $0 \leq \varepsilon \leq 0.1$, $0 \leq \gamma \leq 0.16$ и построили в нем сетку узлов с шагом $2 \cdot 10^{-4}$ (по ε) и $3.2 \cdot 10^{-4}$ (по γ). В каждом узле вычислили значение детерминанта матрицы Гессе и выделили те узлы, в которых детерминант близок к нулю с достаточной степенью точности. Координаты этих узлов подставили в уравнения (1) и нашли значения u^s, ψ^s. В пространстве управления точки с координатами (u^s, ψ^s) расположены на сепаратрисе функции W_1 (или в достаточной близости от нее).

На рис. 2 изображена полученная сепаратриса функции W_1 при жестком нагружении. Потеря устойчивости процесса деформирования происходит тогда, когда путь нагружения в пространстве управлений выходит из области, ограниченной кривыми сепаратрисы, т.е. пересекает кривую AB (рис. 2). Координаты точек этой кривой и определяют предельные значения параметров управления.

Для мягкого и смешанного нагружения потенциальные функции соответственно будут иметь вид:

$$W_2 = W_1 - \int_0^u P\,du - \int_0^\psi M\,d\psi, \quad W_3 = W_1 - \int_0^\psi M\,d\psi.$$

Здесь в выражении потенциальной функции для мягкого нагружения W_2 второе и третье слагаемые – работа внешних сил, взятая со знаком минус. Роль параметров управления для мягкого нагружения играют величины P и M, а параметров состояния – ε, γ, u, ψ. Для смешанного нагружения параметры управления – u, M; параметры состояния ε, γ, ψ. Проводим процедуру, аналогичную случаю жесткого нагружения и получаем соответствующие сепаратрисы для мягкого и смешанного нагружений (рис. 3, 4 соответственно).

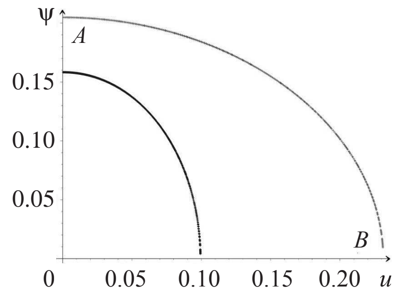

Рис. 2

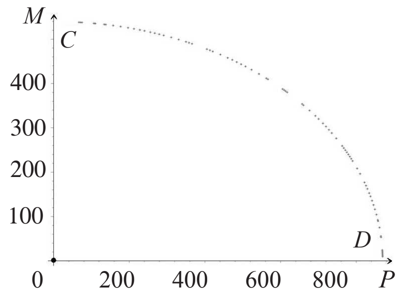

Рис. 3

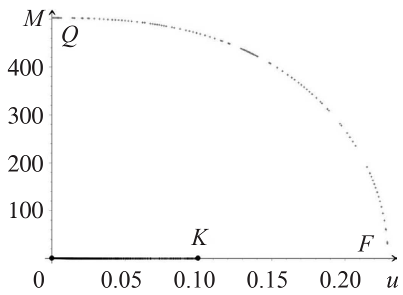

Рис. 4

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-96018).

Список литературы

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: в 2-х кн. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.

3. Стружанов В.В. Об устойчивости двухосного растяжения квадратной пластины в одной градиентной механической системе // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2010. Т. 16, №5. С. 187–195.

4. Стружанов В.В., Просвиряков Е.Ю., Бурмашева Н.В. Об одном методе построения единого потенциала // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, №2. С. 96–107.

A NUMERICAL PROCEDURE FOR CALCULATING THE LIMIT LOADS IN THE PROBLEM OF TENSION AND TORSION OF A FRAMED STRUCTURE

V.V. Privalova

A numerical procedure for calculating the limit loads is suggested. These loads operate on discrete gradient mechanical systems. A part of elements of these systems can already work at the softening stage. The method is illustrated using the problem of tension and torsion of a framed structure of nonlinear material. The non-convex potential (that describes the stable material condition – strengthening and unstable – softening) determines the properties of this material. This numerical procedure allows one to avoid solving the nonlinear equilibrium equation with a step-by-step increase of the loading and estimating the stiffness for each of these equilibrium states in determining the load values leading to the collapse of the system.

Keywords: gradient system, softening, separatrix, catastrophe, matrix Hesse, extreme control parameters.