УДК 539.3

РАЗВИТИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ИНТЕРФЕЙСНЫХ ВОЛН

Д.А. Приказчиков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

prikazchikovda@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлено построение асимптотических моделей поверхностных волн в деформируемых упругих средах. Рассмотрены случаи поверхностной волны Рэлея, а также интерфейсных волн Стоунли и Шольте–Гоголадзе. Асимптотическая модель включает в себя квазистатические эллиптические уравнения, описывающие затухание волны вглубь среды, а также динамическое гиперболическое уравнение для одного из потенциалов на поверхности, соответствующее распространению волны вдоль поверхности, и дифференциальные соотношения, связывающие потенциалы на поверхности. В случае волны Рэлея асимптотическая модель получена в плоской и трехмерной постановке. В случае волн Стоунли и Шольте–Гоголадзе задача рассмотрена в плоской постановке.

Ключевые слова: поверхностные и интерфейсные волны, асимптотические модели, интегральное преобразование Радона.

Асимптотическая модель поверхностной волны Рэлея

Асимптотическая модель волны Рэлея была впервые получена в работе [1] с использованием символического метода Лурье, а затем построена в терминах гармонических функций в [2], что роднит предлагаемый подход с известным классическим [3].

Рассмотрим плоскую постановку задачи, когда уравнения движения задаются известными уравнениями для потенциалов Ламе, а граничные условия при $z = 0$ формулируются в терминах напряжений: $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{zz} = P(x, t)$. В соответствии с асимптотической моделью волны Рэлея [2] затухание вглубь среды описывается эллиптическими уравнениями для потенциалов:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_1^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k_2^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

где $k_i^2 = 1 - c_R^2 / c_i^2$ $(i = 1, 2)$. На поверхности $z = 0$ имеем гиперболическое уравнение и соотношение связи

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B}P,\\ \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{z=0} = -\frac{1+k_2^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0},\end{gathered} \tag{2}$$

где $B = (1-k_1^2)k_2/k_1 + (1-k_2^2)k_1/k_2 + k_2^4 - 1$.

Обобщение до трехмерного случая [4] стало возможным благодаря применению интегрального преобразования Радона. В результате имеем трехмерные квазистатические эллиптические уравнения

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k_1^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) = 0,\\ \frac{\partial^2\psi_i}{\partial z^2} + k_2^2\left(\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2}\right) = 0\end{gathered} \tag{3}$$

внутри среды, двумерное гиперболическое уравнение и соотношения связи на поверхности $z = 0$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1+k_2^2}{2\mu B}P,\\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\Big|_{z=0} = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\Big|_{z=0} - \frac{1+k_2^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}.\end{gathered} \tag{4}$$

Величины φ, ψ_i являются специфическим обобщением потенциалов Ламе, при этом перемещения

$$\begin{gathered}u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial z}, \quad u_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z},\\ u_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}.\end{gathered} \tag{5}$$

Таким образом, в случае упругого полупространства модель волны Рэлея является совокупностью задачи Дирихле и двух задач Неймана, что существенно упрощает постановку по сравнению с точной.

Асимптотическая модель волны Шольте – Гоголадзе

Асимптотическая модель для интерфейсной волны Шольте – Гоголадзе [5] на границе упругой и жидкой сред является естественным обобщением модели поверхностной волны Рэлея. В этом случае к эллиптическим уравнениям (1) добавляется уравнение для потенциала жидкой среды

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + k_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0, \qquad (6)$$

где $k_i^2 = 1 - c_{SG}^2 / c_i^2$, i = 0, 1, 2. Гиперболическое уравнение на границе приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{SG}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (1 + k_2^2)\mu^{-1} \times$$
$$\times \left(2B - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{(1 - k_2^2)^2 (k_0^2 - k_1^2 - 4k_0^2 k_1^2)}{2k_1 k_0^3} \right)^{-1} P, \qquad (7)$$

где P – разность между нормальным напряжением в упругой среде и давлением жидкости на границе $z = 0$, а к соотношению связи на границе (2) добавляется условие

$$\frac{\partial \chi}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{1 - k_2^2}{1 + k_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}. \qquad (8)$$

Асимптотическая модель волны Стоунли

Другим обобщением модели волны Рэлея является модель для интерфейсной волны Стоунли [6] на границе двух упругих полуплоскостей. В терминах потенциалов Ламе φ_m, ψ_m ($m = 1, 2$) для упругих сред имеем эллиптические уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} + k_{1m}^2 \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z^2} + k_{2m}^2 \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \qquad (9)$$

где $k_{im}^2 = 1 - c_S^2 / c_{im}^2$. На границе $z = 0$ получим гиперболические уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} - \frac{1}{c_S^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial t^2} = -\frac{\delta_m P}{A c_S^2}, \qquad (10)$$

где A – достаточно громоздкая постоянная, зависящая от свойств сред, см. [6], а величины δ_m имеют вид

$$\delta_m = (1 - k_{n1} k_{n2})(2(\mu_1 - \mu_2) + (-1)^m \rho_m c_S^2) +$$
$$+ (-1)^n \rho_n c_S^2 (1 + k_{n1} k_{m2}), \quad m \neq n.$$

Соотношения связи между потенциалами записываются в виде

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial x}\Big|_{z=0} = \frac{(-1)^m \kappa_m}{\delta_m k_{m1}} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z}\Big|_{z=0}, \qquad (11)$$

где

$$\kappa_m = \rho_n c_S^2 (k_{11} + k_{21}) -$$
$$- 2(\mu_1 - \mu_2)(1 - k_{n1} k_{n2}) k_{m1}, \quad m \neq n.$$

Заключение

Полученные асимптотические модели позволяют выделить вклад поверхностных и интерфейсных волн в общую динамическую картину, выявляют их двойственную гиперболическую и эллиптическую природу, а также существенно упрощают решение граничных задач. Исследование нестационарной задачи о подвижной нагрузке [7] показало, что явное решение в терминах элементарных функций, полученное с использованием модели волны Рэлея, полностью описывает нестационарную динамику, связанную с распространением поверхностной волны. Следует также отметить, что представление решений в терминах гармонических функций имеет связь с подходом в работе [8].

Работа выполнена при поддержке грантом Президента РФ №МК-4234.2010.8.

Список литературы

1. Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. // Докл. РАН. 2004. Т. 395, вып. 4. С. 482–485.
2. Kaplunov J., Zakharov A., Prikazchikov D. // IMA Jl Appl. Math. 2006. Vol. 71. P. 768–782.
3. Chadwick P. // Jl Elasticity. 1976. Vol. 6. P. 73–80.
4. Dai H.H., Kaplunov J., Prikazchikov D.A. // Proc. Roy. Soc. A. 2010. Vol. 466. P. 3097–3116.
5. Приказчиков Д.А., Томашпольский В.Я. // Труды науч. конф., посвященной 180-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. С. 287–289.
6. Мицкевич В.Г., Приказчиков Д.А. // Наука и техника транспорта. 2008. №3. С. 94-98.
7. Kaplunov J., Nolde E., Prikazchikov D.A. // Wave Motion. 2010. Vol. 47. P. 440–451.
8. Kiselev A.P., Parker D.F. // Proc. Roy. Soc. A. 2010. Vol. 466. P. 2241–2258.

DEVELOPMENT OF THE ASYMPTOTIC MODELS FOR SURFACE AND INTERFACIAL WAVES

D.A. Prikazchikov

This work is analyzing the contribution of surface waves into the overall dynamic response. The cases of surface Rayleigh wave and interfacial Stoneley and Scholte – Gogoladze waves are considered. The asymptotic models of surface waves are obtained through slow-time perturbation approach and formulated in terms of potentials of the continuum media. The introduction of small parameter corresponds to the small deviation between the speed of the travellign wave and the surface wave speed. In case of the Rayleigh surface wave the asymptotic model is obtained both in 2D and 3D formulations. In case of the interfacial waves the plain strain problem is considered.

Keywords: surface and interfacial waves, asymptotic models, Radon integral transform.