УДК 539.3

ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ СЛОИСТЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СРЕД

О.Д. Пряхина, М.В. Самойлов, А.В. Смирнова

Кубанский госуниверситет, Краснодар

donna@kubsu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Построены математические модели, описывающие колебания многослойных полуограниченных электроупругих сред, содержащих системы поверхностных и/или внутренних электродов. Предложен эффективный метод решения данного типа задач. Получены матрично-функциональные соотношения, связывающие основные динамические характеристики, на их основе построены многомерные системы интегральных уравнений с блочной матрицей-символом. Рассмотрены частные случаи.

Ключевые слова: электроупругость, система электродов, слоистость, матрично-функциональные соотношения.

Актуальность исследований, учитывающих различные аспекты взаимодействия деформируемых сред с электрическими полями, обусловлена развитием новых технологий производства искусственных материалов, обладающих выраженным пьезоэффектом. Изучение сопряженных механических и электрических полей, возбуждаемых поверхностными и/или внутренними электродами, основано на решении уравнений электроупругости со смешанными граничными условиями. В [1, 2] предложен эффективный метод исследования динамических задач теории упругости для многослойных полуограниченных сред, содержащих в плоскостях раздела или внутри слоев множественные неоднородности типа жестких включений. Метод основан на оригинальном представлении решения для одного слоя. Затем производится сшивка решений путем удовлетворения граничным условиям задачи. Вводятся специальные матрицы, описывающие расположение неоднородностей в среде, и строятся матрично-функциональные соотношения, связывающие основные динамические характеристики задачи. На основе этого метода для слоистых пьезоэлектриков, принадлежащих классу 6mm гексагональной сингонии, краевые задачи со смешанными граничными условиями сведены к многомерным системам интегральных уравнений (СИУ) [3].

Предлагаемый метод построения блочных матриц-символов большой размерности, основанный на введении специальных матриц, связанных с типом неоднородностей и их положением в слоистой среде, позволяет преобразовать блочные матрицы-символы большой размерности к блочным треугольным матрицам. В общем случае получено представление определителя блочной матрицы-символа в виде произведения определителей специальных матриц. Это дало возможность построить элементы матриц-символов Грина для различных задач в виде отношения целых функций.

При наличии только внутренних электродов в N-слойном пакете со свободной непроводящей верхней гранью и жестко защемленной, металлизированной и закороченной нижней гранью блочная матрица-символ ядра указанной системы $\mathbf{V} = \| \mathbf{V}_{ij} \|_{i,j=1}^{N-1}$ получена в виде [4]:

$$\mathbf{V}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{G}_{Ni}^{-1}, & i = j, \\ -\mathbf{K}_i^- \mathbf{R}_{ij}^- \mathbf{S}_{Nj}^{-1} \mathbf{K}_{N-j}, & i < j, \\ -\mathbf{K}_{N-i} \mathbf{R}_{ij} \mathbf{S}_{Nj}^{-1} \mathbf{K}_j^-, & i > j. \end{cases}$$

Матрицы, фигурирующие в последнем соотношении, а также рекуррентные формулы для их вычисления в случае гармонических колебаний приведены в [1–4]. В частности, для биморфа $N = 2$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{11} = \mathbf{G}_{21}^{-1} = [(\mathbf{K}_1^-(h_1))^{-1} - \mathbf{K}_1^-(h_2)^{-1})]^{-1}.$$

Здесь $\mathbf{K}_1^-$ – матрица Грина электроупругого слоя с акустически свободной непроводящей поверхностью, $\mathbf{K}_1$ – матрица Грина электроупругого слоя с защемленной, металлизированной и закороченной нижней гранью. Заметим, что эти матрицы имеют размерность 4×4 и их элементы зависят от параметров преобразования Фурье, частоты колебаний, а также геометрических, механических и электрических параметров материала слоев, полутолщины которых указаны в аргументе.

Если рассматривается антиплоская задача, когда сдвиговые перемещения совершаются вдоль горизонтальной оси, являющейся осью симметрии кристалла, то выписанные матрицы будут иметь размерность 2×2. При этом элементы матрицы $\mathbf{V}_{11} = \| \mathbf{V}_{ij}^{(11)} \|_{i,j=1}^{2}$ определяются соотношениями:

$$V_{11}^{(11)} = g_1 \frac{n_{10}(h_1) n_{11}(h_2)}{\Delta_{12}(h_1,h_2)} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\varepsilon_1} n_{20}(h_1)\Delta_{21}(h_2) + \frac{1}{\varepsilon_2} g_1 n_{21}(h_2)\Delta_{20}(h_1) \right],$$
$$V_{12}^{(11)} = V_{21}^{(11)} = g_1 \frac{n_{10}(h_1) n_{11}(h_2)}{\Delta_{12}(h_1,h_2)} \times$$
$$\times \left[\frac{e_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} n_{20}(h_1)\Delta_{21}(h_2) + \frac{e_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} g_1 n_{21}(h_2)\Delta_{20}(h_1) \right],$$
$$V_{22}^{(11)} = \frac{g_1}{\Delta_{12}(h_1,h_2)} \left\{ n_{10}(h_1)\Delta_{20}(h_1)\frac{1}{\varepsilon_1} \times \right.$$
$$\times \left[\left(\frac{e_2}{\varepsilon_2}\right)^2 n_{11}(h_2)\Delta_{21}(h_2) - \frac{1}{\varepsilon_2} n_{21}(h_2)\Delta_{11}(h_2) \right] +$$
$$+ g_1 \frac{1}{\varepsilon_2} n_{11}(h_2)\Delta_{21}(h_2) \times$$
$$\left. \times \left[\left(\frac{e_1}{\varepsilon_1}\right)^2 n_{10}(h_1)\Delta_{20}(h_1) - \frac{1}{\varepsilon_1} n_{20}(h_1)\Delta_{10}(h_1) \right] \right\},$$

где

$$\Delta_{12}(h_1,h_2) = n_{10}(h_1) n_{11}(h_2)\Delta_{20}(h_1)\Delta_{21}(h_2) \times$$
$$\times g_1 (e_1/\varepsilon_1 - e_2/\varepsilon_2)^2 - [\Delta_{11}(h_2) n_{10}(h_1) +$$
$$+ g_1 n_{11}(h_2)\Delta_{10}(h_1)][n_{20}(h_1)\Delta_{21}(h_2)/\varepsilon_1 +$$
$$+ g_1 n_{21}(h_2)\Delta_{20}(h_1)/\varepsilon_2], \quad n_{10}(h_k) = \mathrm{ch}(2\sigma_k h_k),$$
$$n_{11}(h_k) = \mathrm{sh}(2\sigma_k h_k)/[\sigma_k(1+\kappa_k^2)],$$
$$\sigma_k^2 = \alpha^2 - \Omega_k^2/(1+\kappa_k^2),$$
$$n_{20}(h_k) = \mathrm{ch}(2\alpha h_k), \quad n_{21}(h_k) = \mathrm{sh}(2\alpha h_k)/\alpha,$$
$$e_k = l e_{15}^{(k)}/c_{44}^{(k)}, \quad \Delta_{10}(h_k) = \sigma_k(1+\kappa_k^2)\mathrm{sh}(2\sigma_k h_k),$$
$$\Delta_{11}(h_k) = \mathrm{ch}(2\sigma_k h_k), \quad \kappa_k^2 = e_k^2/\varepsilon_k,$$
$$\varepsilon_k = l^2 \varepsilon_{11}^{(k)}/c_{44}^{(k)},$$
$$\Delta_{20}(h_k) = \alpha \mathrm{sh}(2\alpha h_k), \quad \Delta_{21}(h_k) = \mathrm{ch}(2\alpha h_k),$$
$$g_1 = c_{44}^{(1)}/c_{44}^{(2)}, \quad \Omega_k^2 = \rho_k \omega^2 b^2/c_{44}^{(k)}.$$

Здесь h_k, ρ_k – полутолщина и плотность k-го слоя; ω – частота колебаний; $c_{44}^{(k)}$, $e_{15}^{(k)}$, $\varepsilon_{11}^{(k)}$ – упругая постоянная, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость соответственно (k = 1, 2); b – характерный линейный размер; параметр l имеет размерность электрического поля; α – параметр интегрального преобразования Фурье.

В случае расположения на границе раздела слоев системы M электродов матричная СИУ динамической задачи о сдвиговых колебаниях двухслойной электроупругой среды, вызванных вибрацией только внутренних электродов, имеет вид [5]:

$$\sum_{k=1}^{M} \int_{\Omega_k} \mathbf{v}(x-\xi)\Delta\mathbf{t}_k(\xi)d\xi = \mathbf{u}_p(x),$$
$$x \in \Omega_p, \quad p = 1,2,\ldots,M,$$
$$\mathbf{v}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta} \mathbf{V}_{11}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

Сдвиговые перемещения и электрический потенциал, являющиеся компонентами вектора $\mathbf{u}_p = \{w_p, \varphi_p\}$, считаются заданными в области расположения электродов Ω_k. Векторы $\Delta\mathbf{t}_k = \{\Delta\tau_k, \Delta d_k\}$, имеющие своими компонентами скачки сдвиговых напряжений и нормальной составляющей вектора электрической индукции, подлежат определению. Выбор контура δ диктуется принципом излучения [6].

Полученные уравнения позволяют исследовать разные аспекты динамики слоистого пьезоэлектрического материала с учетом связанности электрических и механических полей. Различные частные случаи рассмотрены в [3, 5], при этом решение СИУ строилось методом фиктивного поглощения [6, 7].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №11-08-00135, 09-01-96501, 09-01-96502), Рособразования (проект 1.7.08), по программе Президента РФ (НШ-3765.2010.1).

Список литературы

1. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. // Докл. РАН. 2006. Т. 411, №3. С. 330–333.
2. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. // Изв. РАН. МТТ. 2009. №3. С. 55–65.
3. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. №1. С. 59–65.
4. Пряхина О.Д., Смирнова А.В., Самойлов М.В., Маслов Р.Г. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. №1. С. 54–60.
5. Качко Д.Л., Пряхина О.Д., Смирнова А.В. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. №1. С. 44–53.
6. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
7. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.

AN EFFECTIVE METHOD OF RESEARCHING THE DYNAMICS OF LAYERED ELECTRO-ELASTIC MEDIA

O.D. Prychina, M.V. Samoilov, A.V. Smirnova

Mathematical models describing fluctuations of multilayered semi-bounded electro-elastic media, containing systems of external and/or internal electrodes are constructed. An effective method of solution of the given type of problems is offered. The matrix-functional relations correlating the basic dynamic characteristics are obtained; on their basis multivariate systems of the integrated equations with a block matrix-symbol are constructed. Special cases are considered.

Keywords: electro-elasticity, electrodes, multilayered, matrix-functional ratio.