

УДК 539.374

ВОЛНОВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ТЕРМОУПРУГИЕ ВОЛНЫ

© 2011 г.

Ю.Н. Радаев¹, В.А. Ковалев²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
²Московский городской университет управления Правительства Москвы

radayev@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Работа посвящена физическим основам, математическому аппарату современной волновой термомеханики сплошных сред и исследованию связанных термоупругих волн, распространяющихся с конечной скоростью в длинных цилиндрических волноводах. Развивается лагранжев полевого формализм, связанный с принципом наименьшего действия и возможностью полного вариационного описания поля с помощью указанного принципа. Представлена теория геометрических вариационных симметрий связанного термоупругого поля и законов сохранения (включая ряд новых форм). Теория поля применяется в качестве альтернативного подхода к математическому моделированию процесса теплопроводности в твердых телах с помощью гиперболических дифференциальных уравнений, обеспечивающих конечную скорость транспорта тепла и возможность распространения незатухающих тепловых волн «второго звука» в твердых телах. Методами волновой термоупругости на основе уравнений обобщенной термоупругости GN изучаются особенности распространения гармонических термоупругих волн произвольного азимутального порядка вдоль длинного цилиндрического волновода, боковая поверхность которого может быть как проницаемой для тепла, так и теплоизолированной. Предельным переходом в уравнениях гиперболической GN-термоупругости получена теория Похгаммера–Кри нормальных упругих волн в цилиндрическом волноводе круглого поперечного сечения.

Ключевые слова: теория поля, действие, термоупругость, второй звук, волна, волновод, азимутальный порядок, теплообмен.

Процессы транспорта тепла в твердых телах могут моделироваться с помощью двух принципиально разных подходов в зависимости от того, какой физический механизм принимается для его объяснения: термическая диффузия или термическая волна «второго звука». Классическая теория термоупругости (СТЕ, conventional thermoelasticity, [1]) основывается на законе теплопроводности Фурье, который устанавливает пропорциональность вектора потока тепла и отрицательного градиента (антиградиента) температуры. Соответствующее уравнение теплопроводности, как известно, принадлежит к параболическому типу. Исследование фундаментальных решений параболического уравнения теплопроводности позволяет заключить, что температурное возмущение, локализованное в определенном месте термоупругого тела, должно немедленно ощущаться (хотя и с экспоненциальным затуханием) и в любом другом (сколь угодно удаленном) месте, а это, вообще говоря, противоречит принципу причинности. Классическая теория термоупругости предсказывает, таким образом, бесконечно большую скорость распространения любого термического сигнала в упругом теле.

Явление теплопроводности посредством распространения (с конечной скоростью) незатухающих термических волн получило название «второго звука». Моделирование волн «второго звука» является актуальной проблемой современной термомеханики, поскольку их существование в кристаллах высокой чистоты в области сверхнизких температур достаточно надежно подтверждено экспериментально. Нулевое производство энтропии, сопровождающее распространение таких волн, позволяет вести речь об использовании при определенных условиях волнового механизма «второго звука» для передачи теплового сигнала без потерь энергии на значительные расстояния с помощью термоупругого волновода.

В начале 90-х годов XX века Грином и Нахди была предложена весьма общая, отличная от СТЕ теория теплопроводности, известная в настоящее время как GN-теория [2, 3]. Она полностью согласуется с принципами термодинамики необратимых процессов и развита в общей нелинейной форме в трех вариантах (I, II, III): в линейном приближении первый вариант (GN1/СТЕ) приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности; второй вари-

ант (GNII) предлагает рассматривать распространение тепла как волновой недиссипативный процесс, не сопровождающийся производством энтропии, и приводит к гиперболическому уравнению распространения тепла, допускающему решения в форме незатухающих тепловых волн; третий вариант (GNIII) – смешанный – включает первые два в качестве предельных случаев. Главным отличительным признаком теории GNII-термоупругости является то, что она допускает полную вариационную полевую формулировку [4–6]: все основные соотношения GNII-термоупругости могут быть последовательно выведены из принципа наименьшего действия с соответствующим образом подобранным лагранжианом. Современный теоретико-полевой подход к проблемам термомеханики является, по нашему мнению, не только следующим этапом развития термомеханики, но в то же время и программой ее обоснования в рамках теории поля и последующего анализа уравнений термомеханики с позиций теории вариационных симметрий.

Приводится полная лагранжева полевая формулировка теории связанного GNII-термоупругого поля (рассматриваются как нелинейный вариант, так и линеаризованные связанные уравнения); дается вывод дифференциальных уравнений поля и канонических законов сохранения. Скорости распространения слабых разрывов перемещений и температурных смещений исследуются с помощью геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса. Методами волновой термоупругости изучаются особенности распространения гармонических термоупругих волн произвольного азимутального порядка n вдоль длинного цилиндрического волновода, боковая поверхность которого может быть как проницаемой для тепла, так и теплоизолированной. Исследование реализовано в трех термодинамически корректных вариантах: GNI/CTE, GNII, GNIII. Значительное внимание уделено волнам со вторыми, третьими и более высокими азимутальными числами. В рамках наиболее общей модели линейной теории GNIII-термоупругости получено решение задачи о прохождении связанной гармонической термоупругой волны с высоким азимутальным числом (номером окружной гармоники) вдоль оси свободного цилиндрического волновода кругового поперечного сечения с теплопроницаемой (теплоизолированной) боковой стенкой. Установлено [6], что теория распространения гармонических упругих волн в изотропном цилиндрическом волноводе круглого поперечного сечения, созданная более ста лет назад в работах Похгаммера и Кри, получается в качестве

предельного варианта гиперболической термоупругой модели GNII.

Для каждого азимутального числа n найден частотный детерминант термоупругих волн и средствами MathCAD 14 численно проведено исследование частотного уравнения для решения весьма сложной для высоких азимутальных чисел проблемы локализации на комплексной плоскости значений волновых чисел k . Известно, что с возрастанием азимутального числа абсолютная величина частотного детерминанта стремительно уменьшается. Поэтому по достижении некоторого (весьма, впрочем, небольшого) «порогового» значения вычисления с большими азимутальными числами оказываются невыполнимыми. Как следствие, необходимы дальнейшие преобразования частотного детерминанта и построение «эквивалентных» детерминантов, пригодных для проведения вычислений волновых чисел термоупругих волн высокого азимутального порядка. С помощью различного рода приемов удается поднять «пороговые» азимутальные числа до $n = 250$. Результаты исследования частотного уравнения в случае высоких окружных гармоник ($n = 20; 97$) [7] даны в форме графиков на комплексной плоскости (Rek, Imk) линий нулевого уровня значений вещественной и мнимой частей частотного детерминанта с выделенными зонами локализации комплексных корней частотного уравнения. Проведен системный анализ характерных для больших n закономерностей поведения частотного детерминанта в заданной области значений действительной и мнимой частей волнового числа связанной термоупругой волны.

Представленная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект №10-01-00184-а «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»).

Список литературы

1. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27(3). P. 240–253.
2. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.
3. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.
4. Kalpakides V.K., Maugin G.A. Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation // Reports in Mathematical Physics. 2004. Vol. 53. P. 371–391.
5. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
6. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи

теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

7. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Романов А.Е. Промождение теплового GNIII-волнового сигнала с высокой окружной гармоникой через цилиндрический вол-

новод // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сб. трудов Междунар. конф., посв. 80-летию д.ф.-м.н., проф. Д.Д. Ивлева. Воронеж: Изд. центр Воронежского гос. ун-та, 2010. С. 173–180.

WAVE PROBLEMS OF THE FIELD THEORY AND CROSS-COUPLED THERMOELASTIC WAVES

Yu.N. Radayev, V.A. Kovalev

The physical foundations and mathematical formalism of the contemporary wave continuum thermomechanics are considered; and coupled thermoelastic waves travelling at finite velocities in long waveguides are studied. Lagrange field formalism sequent to the minimum action principle and a possibility of full variational description of a physical field in a space-time is developed. The theory of variational symmetries for a cross-coupled thermoelastic field and conservation laws (including their new forms) are presented. Field theoretic approach is then applied to mathematically modeling heat transport in solids by hyperbolic partial differential equations which ensure heat impulses to travel at finite speeds and admit undamped heat waves of the second sound in solids. By the wave thermomechanics methods employing GN-theory equations a problem of propagation of harmonic cross-coupled thermoelastic waves of an arbitrary azimuthal order via a long waveguide (sidewall of the waveguide is assumed free from tractions and permeable to heat or isolated from heat interchanging) is studied. As a limiting case of hyperbolic GN scheme the Pochhammer-Chree theory of elastic wave propagating in a rod is derived.

Keywords: field theory, action, thermoelasticity, second sound, wave, waveguide, azimuthal order, heat interchanging.