

УДК 539.3

АНАЛИЗ ТЕРМОУПРУГОЙ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ  
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© 2011 г.

Я.Ю. Ратаушко

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

belov\_a2@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается трехмерная линейная математическая теория термоупругости. Для анализа соответствующих начально-краевых задач выписаны граничные интегральные уравнения и гранично-элементная схема их решения. Приведены численные примеры.

*Ключевые слова:* трехмерная постановка анизотропная упругость, термоупругость, численное моделирование.

Рассмотрим область  $\Omega \subset R^3$  с границей  $\partial\Omega$  как однородную изотропную термоупругую среду типа Био, которая характеризуется константами Ламе  $\lambda, \mu$ , плотностью  $\rho$ , коэффициентом тепловой диффузии  $\chi$  и константами сопряжения  $\gamma$  и  $\eta$ .

Модель начально-краевых задач имеет вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) - \gamma\nabla\theta &= \rho\ddot{u}, \\ \Delta\theta - \frac{1}{\chi}\dot{\theta} - \eta\nabla \cdot \dot{u} &= 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

$$v = g, \quad x \in (\partial\Omega)^u, \quad t = q, \quad x \in (\partial\Omega)^\sigma,$$

$t_n = T(\nabla, n(x))u - \gamma n(x)\theta = P(\nabla, n(x))v = P_n v$ , где  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор смещений,  $\theta$  – температура среды, точка над функцией обозначает дифференцирование по времени,  $T(\nabla, n(x))$  – оператор напряжений классической теории упругости;  $n(x)$  – нормаль к площадке, содержащей точку  $x$ ;  $a \cdot b$  – скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ .

Применение интегрального преобразования Лапласа, формулы Грина дает интегральное представление решения прямой формулировки [1, 2]:

$$\begin{aligned} v(x) &= \pm \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} [v(y)R * (\nabla, n)U(x, y) - \\ &\quad - U(x, y)R(\nabla, n)v(y)] d_y s(y), \\ &\quad x \in \Omega \quad (x \in R^3/\bar{\Omega}), \end{aligned}$$

где  $*$  – сопряженный оператор,  $U$  – матрица фундаментальных решений системы (1),  $v = (u_1, u_2, u_3, \theta)$ ,  $R(\nabla, n)$  – граничный оператор термоупругих напряжений:

$$R(\nabla, n) = \begin{bmatrix} T(\nabla, n) & -\gamma n \\ 0 & \nabla \cdot n \end{bmatrix}.$$

На основе интегрального представления строятся [1, 3] граничные интегральные уравнения. Базовый процесс гранично-элементной дискретизации состоит в разбиении границы на  $N_E$  граничных элементов  $E_e$  ( $1 \leq e \leq N_E$ ) совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов [3] (рис. 1).

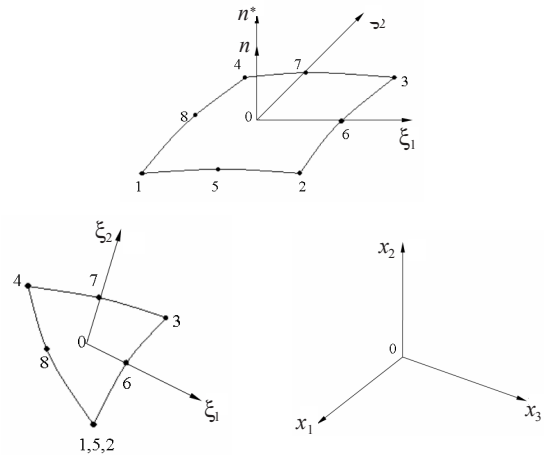


Рис. 1

При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы (см. рис. 1), каждый из которых отображается на контрольный элемент  $\Delta_e$  (каждый  $\Delta_e$  – это либо квадрат  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$ , либо треугольник  $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$ ). Элемент  $E_e$  отображается на элемент  $\Delta_e$  с помощью уравнения:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \xi \in \Delta_e,$$

где  $\beta(k, l)$  – глобальный номер узла, имеющего в  $k$ -м элементе локальный номер  $l$ ;  $N^l(\xi)$  – функции формы, в качестве которой выбраны квадра-

точные полиномы интерполяции. Строятся необходимые характеристики элемента.

Неизвестные граничные поля интерполируются через узловые значения. Для аппроксимации обобщенных граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации обобщенных поверхностных сил – постоянные элементы. Для расчетного значения параметра преобразования Лапласа  $p$  строятся дискретные аналоги ГИУ на основе метода коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. Специфику вычислительного процесса определяют особенности в коэффициентах дискретного аналога. Рассматриваются два случая. Первый – интеграл по элементу регулярный и интегрирование по элементу сведено к повторному интегрированию по локальным координатам. По каждой из координат используются квадратурные формулы Гаусса. Второй случай – интеграл сингулярный, предварительно используются дополнительные преобразования, а затем уже формулы Гаусса. Для повышения точности получения коэффициентов дискретных аналогов использованы адаптивный алгоритм численного интегрирования и учет симметрии задачи. Суть адаптивного алгоритма численного интегрирования заключается в том, что процесс интегрирования по граничному элементу завершен только тогда, когда достигается заданная точность. Оценка точности осуществляется по величине нормы остаточного члена. До достижения заданной точности происхо-

дит подразбиение граничного элемента интегрирование в пределах элемента идет на более мелкой гранично-элементной сетке (рис. 2).

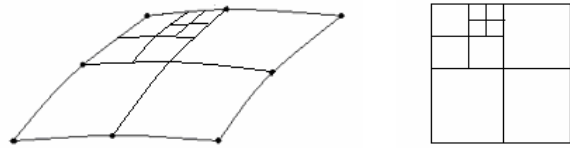


Рис. 2

В качестве демонстрации работоспособности гранично-элементной схемы рассмотрены модельные задачи.

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК №2222), при поддержке РФФИ (проект № 10-08-01017-а) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.*

#### Список литературы

1. Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. 2-е изд. М.: Наука, 1976. 664 с.
2. Sakoni F. // Math. Meth. Appl. Sci. 2000. No 23. P. 441–466.
3. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

## BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF THERMOELASTIC DYNAMICS OF 3D BODIES

*Ya. Yu. Rataushko*

The three-dimensional linear mathematical theory of thermoelasticity is examined. To analyze the related initial boundary-value problems, boundary integral equations and a boundary-element scheme for analyzing them are written down. The numerical examples are given.

*Keywords:* 3D formulation, anisotropic elasticity, thermo-elasticity, numerical modeling.