УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ВИДУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Д.А. Ромашин, А.А. Трещев

Тульский госуниверситет

taa58@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проанализированы известные подходы к построению определяющих соотношений для нелинейных анизотропных материалов, сопротивление деформированию которых зависит от вида напряженного состояния. Показано, что известные модели имеют существенные недостатки, не позволяющие с достаточной точностью использовать их при расчетах большого ряда конструкций.

Ключевые слова: определяющие соотношения, деформации, вид напряженного состояния, нелинейная аппроксимация, композит.

В разнообразных отраслях промышленности, так же как и в строительстве, с развитием прогресса получили широкое применение конструкционные материалы, механические свойства которых не соответствуют классическим представлениям об упругопластическом деформировании твердых тел.

Большинство существующих теорий деформирования разносопротивляющихся материалов имеют ряд существенных недостатков, в конечном счете приводящих к искажению реальной картины напряженно-деформированного состояния. Построение новой математической модели состояния конструкционных материалов, универсально работающей при любых напряженных состояниях, представляет собой одно из важнейших направлений механики деформированного твердого тела.

Требуется установить взаимно-однозначные соотношения между компонентами напряженного и деформированного состояния с указанием системы экспериментов, достаточных для определения констант, входящих в уравнения состояния и характеризующие механические свойства рассматриваемого материала. Эти соотношения представляются в виде степенных полиномов относительно напряжений, конкретизированы для ортотропного и трансверсально изотропного тела, а также для общего случая анизотропии.

В произвольной ортогональной системе координат определяющие соотношения для общего случая анизотропии нелинейно-упругих материалов предлагается представить подобно [1]:

$$e_{ij} = C_{ijkm}(\varepsilon_i, \alpha_{ij})\sigma_{km} \quad (i, j, j, k, m = 1,2,3), \tag{1}$$

где

$$C_{kkkk}(\varepsilon_i) = A_{kkkk}(\varepsilon_i) + B_{kkkk}(\varepsilon_i)\alpha_{kk},$$
$$C_{iijj}(\varepsilon_i) = A_{iijj}(\varepsilon_i) + B_{iijj}(\varepsilon_i)(\alpha_{ii} + \alpha_{jj}), \quad i \neq j,$$

(здесь и далее по индексам не суммировать);

$$C_{iiij}(\varepsilon_i) = A_{iiij}(\varepsilon_i) + B_{iiij}(\varepsilon_i)(\alpha_{ii} + \sqrt{2}\alpha_{ij}),$$
$$C_{ijij}(\varepsilon_i) = A_{ijij}(\varepsilon_i) + B_{ijij}(\varepsilon_i)\sqrt{2}\alpha_{ij}, \quad i \neq j,$$
$$C_{iijk}(\varepsilon_i) = A_{iijk}(\varepsilon_i) + B_{iijk}(\varepsilon_i)(\alpha_{ii} + \sqrt{2}\alpha_{jk}),$$
$$j \neq k,$$
$$C_{ijkm}(\varepsilon_i) = A_{ijkm}(\varepsilon_i) + B_{ijkm}(\varepsilon_i)\sqrt{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{km}),$$
$$i \neq j, \ k \neq m, \quad C_{ijkm}(\varepsilon_i) = C_{kmij}(\varepsilon_i),$$

где

$$\alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{S}, \quad S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}},$$
$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}((\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 +$$
$$+ (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 3/2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2))^{1/2},$$

$A_{ijkm}(\varepsilon_i)$, $B_{ijkm}(\varepsilon_i)$ – компоненты тензоров четвертого ранга, для определения которых достаточно простейших опытов по одноосному растяжению и сжатию в направлении главных осей анизотропии и под углом 45° к ним в плоскостях упругой симметрии данного материала.

При этом материальные функции вычисляются следующим образом:

$$A_{kkkk}(\varepsilon_i) = 1/2(1/E_{ij}^{+}(\varepsilon_i) + 1/E_{ij}^{-}(\varepsilon_i)),$$
$$B_{kkkk}(\varepsilon_i) = 1/2(1/E_{ij}^{+}(\varepsilon_i) - 1/E_{ij}^{-}(\varepsilon_i)),$$

$$A_{iijj}(\varepsilon_i) = -1/2(\nu_{ij}^{+}/E_{ij}^{+}(\varepsilon_i) + \nu_{ij}^{-}/E_{ij}^{-}(\varepsilon_i)),$$

$$B_{iijj}(\varepsilon_i) = -1/2(\nu_{ij}^{+}/E_{ij}^{+}(\varepsilon_i) - \nu_{ij}^{-}/E_{ij}^{-}(\varepsilon_i)),$$

где E_{ij} – модуль упругости, $\nu_{ij}^{\pm}$ – коэффициент поперечных деформаций.

Функции определяющих соотношений будем вычислять по результатам простейших экспериментов. Принимая нелинейную зависимость, представим материальные функции в зависимости от отношения интенсивности напряжений к интенсивности деформаций. С помощью программы Microcal Origin 6.0 (Microcal Software Inc.) выводится зависимость для функций $1/[E_{ij}^{+}(\varepsilon_i)]$, $1/[E_{ij}^{-}(\varepsilon_i)]$ и $\nu_{ij}^{+}/[E_{ij}^{+}(\varepsilon_i)]$, $\nu_{ij}^{-}/[E_{ij}^{-}(\varepsilon_i)]$ для каждого эксперимента. Полученные выражения подставляются в формулы (1) для определения функций определяющих соотношений.

Рассмотрим композит углеродное волокно – углерод AVCO Mod 3a [2, 3].

При одноосном растяжении-сжатии в направлении главной оси анизотропии X_1

$$A_{1111}(\varepsilon_i) = 0.5[0.085 + 0.0146\varepsilon_i + 5.9\cdot10^{-4}\varepsilon_i^2 + (0.094 + 0.0066\varepsilon_i + 2.74\cdot10^{-4}\varepsilon_i^2)];$$

$$B_{1111}(\varepsilon_i) = 0.5[0.085 + 0.0146\varepsilon_i + 5.9\cdot10^{-4}\varepsilon_i^2 - (0.094 + 0.0066\varepsilon_i + 2.74\cdot10^{-4}\varepsilon_i^2)];$$

$$A_{1122}(\varepsilon_i) = 0.5[0.006 + 2.84\cdot10^{-4}\varepsilon_i + 6.26\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2 + (0.0016 + 8.8\cdot10^{-4}\varepsilon_i + 7.2\cdot10^{-6}\varepsilon_i^2)];$$

$$B_{1122}(\varepsilon_i) = 0.5[0.006 + 2.84\cdot10^{-4}\varepsilon_i + 6.26\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2 - (0.0016 + 8.8\cdot10^{-4}\varepsilon_i + 7.2\cdot10^{-6}\varepsilon_i^2)];$$

$$A_{1133}(\varepsilon_i) = 0.5[0.018 + 0.0011\varepsilon_i - 2.54\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2 + (0.005 + 0.0013\varepsilon_i + 6.8\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2)];$$

$$B_{1133}(\varepsilon_i) = 0.5[0.018 + 0.0011\varepsilon_i - 2.54\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2 - (0.005 + 0.0013\varepsilon_i + 6.8\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2)]. \quad (2)$$

Графические зависимости напряжений от деформаций при нелинейной аппроксимации для осевого растяжения–сжатия вдоль главной оси анизотропии X_1 представлены на рис. 1*а* (растяжение), *б* (сжатие). На рисунке приняты обозначения 1 – продольная деформация ε_{11}; 2, 3 – поперечные деформации ε_{22} и ε_{33}; сплошная линия – экспериментальные данные, квадратики – нелинейные аппроксимации.

Таким образом, деформации и напряжения достаточно точно связываются зависимостями:

$$\begin{aligned} e_{11} = {} & [0.5[0.085 + 0.0146\varepsilon_i + 5.9\cdot10^{-4}\varepsilon_i^2 + (0.094 + 0.0066\varepsilon_i + 2.74\cdot10^{-4}\varepsilon_i^2)] + \\ & + 0.5[0.085 + 0.0146\varepsilon_i + 5.9\cdot10^{-4}\varepsilon_i^2 - (0.094 + 0.0066\varepsilon_i + 2.74\cdot10^{-4}\varepsilon_i^2)]\alpha_{11}]\sigma_{11} + \\ & + [0.5[0.006 + 2.84\cdot10^{-4}\varepsilon_i + 6.26\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2 + (0.0016 + 8.8\cdot10^{-4}\varepsilon_i + 7.2\cdot10^{-6}\varepsilon_i^2)] + \\ & + 0.5[0.006 + 2.84\cdot10^{-4}\varepsilon_i + 6.26\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2 - (0.0016 + 8.8\cdot10^{-4}\varepsilon_i + 7.2\cdot10^{-6}\varepsilon_i^2)]\times \\ & \times(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + [0.5[0.018 + 0.0011\varepsilon_i - 2.54\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2 + (0.005 + 0.0013\varepsilon_i + \\ & + 6.8\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2)] + 0.5[0.018 + 0.0011\varepsilon_i - 2.54\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2 - (0.005 + 0.0013\varepsilon_i + \\ & + 6.8\cdot10^{-5}\varepsilon_i^2)](\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Трещев А.А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов. М.–Тула: РААСН–ТулГУ, 2007. 160 с.
2. Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite // AIAA Journal. 1976. Vol. 14, No 10. P. 1427–1435.
3. Jones R.M., Nelson D.A.R. Further characteristics of a nonlinear material model for ATJ-S Graphite // Journal Composit Materials. 1975. Vol. 9, No 7. P. 251–265.

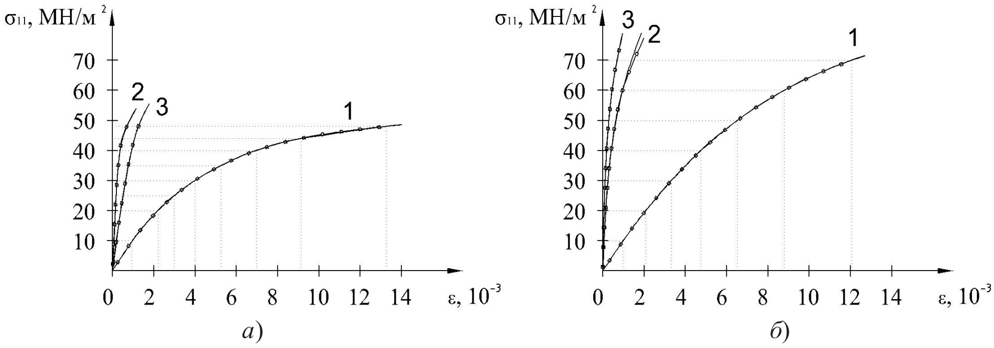

Рис. 1

DEFINING RELATIONS FOR NONLINEAR ANISOTROPIC MATERIALS ARE SENSITIVE TO MEAN STRESS

D.A. Romashin, A.A. Treschev

After analyzing the known approaches to the construction of constitutive relations for nonlinear anisotropic materials, whose resistance to deformation depends on the type of stress. It is shown that well-known models have significant drawbacks, not allowing a sufficiently accurate to use them in calculations of a large number of structures.

Keywords: defining relations, strains, view the state of stress, non-linear approximation, composite.