УДК 539.3

ОБ АВТОМОРФИЗМЕ МНОГООБРАЗИЙ И МЕТОДЕ БЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

В.А. Бабешко[1], О.В. Евдокимова[2], О.М. Бабешко[1]

[1]Кубанский госуниверситет, Краснодар
[2]Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

babeshko@kubsu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Излагаются основы теории метода блочного элемента, показана роль автоморфизма топологических многообразий при ее построении, обсуждается связь метода с другими подходами, методами конечного и граничного элементов, приводятся примеры приложения к задачам механики деформируемого твердого тела и в других областях. В частности, показан способ построения блочных элементов в квантовой механике, в четырехмерных пространствах нестационарных граничных задач, для моделирования территорий с тектоническими разломами на предмет оценки напряженности литосферных плит.

Ключевые слова: блочный элемент, граничная задача, псевдодифференциальные уравнения, автоморфизм, многообразия.

Введение

При использовании факторизационных методов для исследования и решения граничных задач в блочных структурах важную роль играют псевдодифференциальные уравнения [1]. Они служат своего рода «диспетчером» при постановке и реализации граничной задачи, изменением параметров которых можно ставить граничные задачи как основные, так и смешанные. Интересные свойства этих операторов обнаружились при исследовании граничных задач квантовой механики [2].

В нестационарных граничных задачах псевдодифференциальные операторы переводят начальные условия в категорию граничных [3].

Псевдодиффуренциальные уравнения являются основными уравнениями при исследовании резонансных свойств блочных структур в методе блочного элемента [4], а также при решении этим методом граничных задач с разделяющимися переменными. Представляет интерес выяснение взаимосвязи автоморфизма и псевдодифференциальных уравнений при различных способах их построения.

Метод блочного элемента применяется к нестационарным граничным задачам, в которых коэффициенты дифференциальных уравнений зависят от времени. Такие граничные задачи характерны для материалов с изменяющимися во времени свойствами, нестационарных процессов, возникающих при описании переменных во времени физических полей, для различных инженерных приложений при исследовании процессов, протекающих во времени.

Актуальной на сегодняшний день является проблема прогноза нарастания сейсмичности в сейсмоопасных зонах, имеющих сложный ландшафт, в том числе горный, а также разломы. Предлагается исследование этой проблемы с применением метода механики разрушения. Для реализации такого подхода развиваются методы расчета напряженно-деформированного состояния литосферных плит как деформируемых твердых тел, подвергаемых внешним воздействиям различной природы.

Постановка и методы решения

Способ построения псевдодифференциальных уравнений основан на требовании автоморфизма многообразий с краем, то есть носителей, на которых поставлена граничная задача. Основанием для выполнения автоморфизма является основная теорема, доказательство которой впервые опубликовано в [5]. Однако в некоторых частных случаях псевдодифференциальные уравнения удается построить, не прибегая к автоморфизму. Эти частные случаи относятся к выпуклым блочным элементам. Для них факторизационная задача сводится к «неполным» функциональным уравнениям Винера–Хопфа. Псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно строить их исследованием.

Блочный элемент для нестационарных граничных задач с переменными во времени коэффициентами строится дифференциальным методом факторизации в четырехмерном пространстве трех геометрических координат и времени.

Технические сложности возникают лишь при исследовании гиперболических уравнений для тех блочных элементов, через носитель которых проходит волновой фронт, где требуется соблюдение принципа причинности.

В качестве примера построен блочный элемент для скалярной начально-граничной задачи, перенос результатов на векторный случай усложняет лишь техническую сторону, требующую факторизации матриц-функций. Блочный элемент строится для любой конечной системы дифференциальных уравнений в частных производных, причем порядок производных может быть любым, ограниченным. Элемент строится по определенному алгоритму автоматически.

Литосферные плиты имеют разломы, трещины, включения, которые могут сильно влиять на их прочностные свойства. В частности, разломы литосферных плит в соответствии с имеющимися данными вибросейсмического зондирования могут быть сквозными, рассекающими литосферную плиту от поверхности до основания, частичными, выходящими либо на поверхность, либо на нижнее основание, внутренними, полостями, не касающимися границы. Все эти разломы могут существенно влиять на концентрацию напряжений в литосферных плитах и, таким образом, на нарастание сейсмичности. Считается, и это подтверждено практикой, что очагами землетрясений являются именно зоны разломов. Существуют различные подходы к описанию разломов. Однако практически все из них рассматривают разломы как трещины Гриффица, что в принципе не всегда так. Поэтому для решения проблемы напряженности литосферных плит проводится более детальное исследование типов разломов, и методом блочного элемента вводятся разломы каньонного типа, имеющие конечные расстояния между берегами.

Территория с разломами рассматривается как горизонтально ориентированная блочная структура, блоки которой разъединены разломами. В том случае, если реальные разломы не разделяют среду на блоки, в блочной структуре вводятся виртуальные блоки, условно выделяющие блок, частично отделенный реальным и частично виртуальным разломом.

Основные результаты

На примерах граничной задачи в выпуклой области Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ для эллиптического дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами строится псевдодифференциальное уравнение граничной задачи и демонстрируется его связь с автоморфизмом. Доказано, что выполнение автоморфизма и обращение в нуль псевдодифференциального уравнения – эквивалентные требования. В случае нестационарных задач показано, что традиционная постановка начально-граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных, сопровождаемая формулировкой граничных и начальных условий, в случае применения метода блочного элемента претерпевает изменение: понятие начальных условий утрачивается, они переходят в категорию граничных. При использовании алгоритмов исследования методом блочного элемента граничных задач обнаруживается возможность их применения ко всем типами уравнений – эллиптическим, параболическим и гиперболическим.

В приложениях к сейсмологии достоинство факторизационных методов состоит в том, что псевдодифференциальные уравнения позволяют строго удовлетворять реальным граничным условиям. На границах реальных разломов выполняются заданные граничные условия, на границах виртуальных разломов – условия непрерывности среды. Приводятся примеры конкретных приложений на территории Краснодарского края с применением ГИС-технологий.

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке РФФИ (гранты 09-08-00170, 09-08-00171), программой Юг России (проекты 09-01-96500, 09-01-96503, 09-08-96522, 09-08-96527, 09-08-00294, 11-08-96502, 11-08-96503, 11-08-96506, 11-08-96504, 11-08-96522, 11-08-96505), в рамках проекта НШ-3765.2010.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН, в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 (госконтракт № 16.740.11.0135).

Список литературы

1. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Интегральные преобразования и метод факторизации в краевых задачах // Докл. РАН. 2005. Т. 403, №6. С. 26–28.

2. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О квантовомеханических свойствах блочных элементов в наноматериалах // Докл. РАН. 2010. Т. 435, №2. С. 190–194.

3. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О методе блочного элемента в нестационарных задачах // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2011. №2. С. 81–86.

4. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О блочных элементах в слоистых средах с рельефной границей // Докл. РАН. 2010. Т. 435, №1. С. 29–34.

5. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Выполнение граничных условий в дифференциальном методе факторизации // Докл. РАН. 2007. Т. 412, №5. С. 600–603.

ON AUTOMORPHISM OF MANIFOLDS AND METHOD OF BLOCK ELEMENT

V.A. Babeshko, O.V. Evdokimova, O.M. Babeshko

The report outlines the basis for theory of the block element method, and shows the role of automorphism of topological manifolds in its construction. We discuss the relation of the method with other approaches, methods of finite and boundary elements, and give examples for applications of the method to problems of solid mechanics and in other areas. In particular, it is shown how to build block elements in quantum mechanics, in four-dimensional spaces of non-stationary boundary-value problems, and for modeling a terrain with tectonic faults to assess the tension of lithospheric plates.

Keywords: block element, boundary problem, pseudo differential equations, automorphism, manifolds.