Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1750–1752

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, ПЛАСТИН И БАЛОК. ПРОЧНОСТЬ, ДИНАМИКА, ТЕРМОУПРУГОСТЬ

С.О. Саркисян

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна (Армения)

slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

На основе асимптотического анализа краевых и начально-краевых задач микрополярной теории упругости и термоупругости формулируются достаточно общие гипотезы и построены математические модели статической деформации, динамики и термоупругости микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок. Изучены конкретные задачи о прочности, температурных напряжениях и колебаниях микрополярных балок, пластин и оболочек.

Ключевые слова: микрополярно-упругий, оболочка, пластинка, балка, теория, статика, динамика, термоупругость.

С учетом качественных результатов асимптотического решения системы уравнений трехмерной микрополярной теории упругости [1] в основу построения математических моделей тонких оболочек можно ставить следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

1. Тангенциальные перемещения и нормальный поворот распределены по толщине оболочки по линейному закону:

$$V_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\psi_i(\alpha_1,\alpha_2),\quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1,\alpha_2)+\alpha_3\iota(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (1)$$

а нормальное перемещение и тангенциальные повороты не зависят от поперечной координаты α_3, т.е.

$$V_3 = w(\alpha_1,\alpha_2), \quad \omega_i = \Omega_i(\alpha_1,\alpha_2). \qquad (2)$$

Отметим, что с точки зрения перемещений принятая гипотеза (1) по сути, совпадает с кинематической гипотезой Тимошенко в классической теории упругих оболочек. Гипотезу (1), (2) в целом назовем обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек.

2. Силовым напряжением σ_{33} в обобщенном законе Гука (2) можно пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii}.

3. При определении деформаций, изгиба-кручения, силовых и моментных напряжений для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2). \qquad (3)$$

После вычисления указанных величин σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к этим значениям соответствующих слагаемых, получаемых интегрированием первых двух или шестого уравнений равновесия, для которых потребуем условие, чтобы усредненные по толщине оболочки величины были равны нулю.

4. Величинами α_3/R_i по сравнению с единицей можно пренебрегать.

Основная система уравнений статики микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений будет иметь вид:

– уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(T_{ii}-T_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(S_{ji}+S_{ij})+\frac{N_{i3}}{R_i}=-(q_i^+ + q_i^-),$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(M_{ii}-M_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(H_{ji}+H_{ij})-N_{3i}=-h(q_i^+ - q_i^-),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2N_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1N_{23})}{\partial\alpha_2}\right]=q_3^+ + q_3^-,$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(L_{ii}-L_{jj})+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(L_{ji}+L_{ij})+\frac{L_{i3}}{R_i}+$$

$$+(-1)^j(N_{j3}-N_{3j})=-(m_i^+ + m_i^-),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2L_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1L_{23})}{\partial\alpha_2}\right]-$$

$$-(S_{12}-S_{21})=(m_3^+ + m_3^-),$$

$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2\Lambda_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1\Lambda_{23})}{\partial\alpha_2}\right]-$$

$$-(H_{12}-H_{21})=h(m_3^+ - m_3^-); \qquad (4)$$

– соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}], \quad S_{ij}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+$$

$$+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}], \quad M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_{ii}+\nu K_{jj}],$$

$$H_{ij}=\frac{2h^3}{3}[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}],$$

$$N_{i3}=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{3i},$$

$$N_{3i}=2h(\mu+\alpha)\Gamma_{3i}+2h(\mu-\alpha)\Gamma_{i3},$$

$$L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}], \qquad (5)$$

$$L_{33}=2h[(\beta+2\gamma)\iota+\beta(\kappa_{11}+\kappa_{22})],$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],$$

$$\Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right],$$

$$L_{ij}=2h[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}],$$

$$L_{33}=2h[(\beta+2\gamma)\iota+\beta(\kappa_{11}+\kappa_{22})],$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],$$

$$\Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right];$$

– геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},$$

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-(-1)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,$$

$$K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-(-1)^j\iota,$$

$$\widetilde{A}_{i3}=-\vartheta_i+(-1)^j\Omega_j, \quad \widetilde{A}_{3i}=\psi_i-(-1)^j\Omega_j,$$

$$\vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2+\frac{\Omega_3}{R_i},$$

$$\kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$

$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i}, \quad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}.$$

«Смягченные» граничные условия на граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки, считая, что этот контур совпадает с координатной линией α_1 = const, можно записать в виде:

$$T_{11}=T_{11}^* \text{ или } u_1=u_1^*, \quad S_{12}=S_{12}^* \text{ или } u_2=u_2^*,$$

$$N_{13}=N_{13}^* \text{ или } w=w^*,$$

$$M_{11}=M_{11}^* \text{ или } K_{11}=K_{11}^*,$$

$$H_{12}=H_{12}^* \text{ или } K_{12}=K_{12}^*, \qquad (7)$$

$$L_{11}=L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11}=\kappa_{11}^*,$$

$$L_{12}=L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12}=\kappa_{12}^*, \quad L_{13}=L_{13}^*$$

$$\text{или } \kappa_{13}=\kappa_{13}^*, \quad \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13}=l_{13}^*.$$

В модели (4)–(7) микрополярных упругих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

На основе принципа Даламбера получим модель динамики микрополярных оболочек со свободным вращением. Построена также модель термоупругости микрополярных оболочек. Математические модели для микрополярных пластин и балок получены как частные случаи модели оболочек. Рассмотрены некоторые классы прикладных задач для микрополярных балок, пластин и оболочек.

Список литературы

1. Саркисян С.О. Общая теория упругих тонких оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл. НАН Армении. 2008. Т. 108, №4. С. 309–319.

ANALYTICAL MECHANICS OF MICROPOLAR ELASTIC THIN SHELLS, PLATES AND BARS. STRENGTH, DYNAMICS, THERMOELASTICITY

S.O. Sargsyan

Based on the asymptotic analysis of boundary and initial-edge problems of the micropolar theory of elasticity and thermoelasticity in thin regions, general hypotheses are formulated, which lead to the construction of mathematical models of static deformation, dynamics and thermoelasticity of micropolar elastic thin shells, plates and bars. Special attention is given to the study of specific problems of strength, temperature stresses and vibrations in terms of micropolar bars, plates and shells.

Keywords: micropolar-elastic, shell, plate, bar, theory, statics, dynamics, thermoelasticity.