УДК 539.3

СТАТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗКАХ

Р.А. Сафонов

Образовательно-научный институт наноструктур и биосистем
Саратовского госуниверситета

safonovra@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается численное решение задач статического изгиба и установившихся колебаний тонких прямоугольных пластинок и оболочек при локальных нагрузках, заданных функциями специального вида. Подход иллюстрируется на примерах решения задач для изотропных, ортотропных пластинок, пластинок из упруго-наследственного материала, а также изотропных цилиндрических оболочек. Проводится сравнение полученных результатов с известными теоретическими решениями и решениями, полученными с помощью других численных методов. Для цилиндрических оболочек проводится сравнение данных по классической теории и по теории пологих оболочек, делается вывод об условиях справедливости гипотез пологости.

Ключевые слова: пластинки, оболочки, статический изгиб, установившиеся колебания, локальные нагрузки.

При исследовании статических и динамических задач для тонкостенных конструкций, испытывающих изгибные деформации, важную роль играют так называемые локальные усилия, т.е. нагрузки, распределенные по малой части лицевой поверхности тела.

Как правило, для аналитического и численного решения задач такого рода приложенная в точке локальная нагрузка задается с помощью дельта-функции. Проводится разложение этой функции в ряд Фурье и вычисляется решение задачи при нагрузке, заданной каждым из членов ряда. Решение исходной задачи представляется как суперпозиция полученных результатов.

Другой подход к исследованию локальных нагрузок состоит в представлении такой нагрузки в виде предела равномерно распределенных по малой площадке усилий при размере площадки, стремящемся к нулю. При предельном переходе дополнительно ставится условие постоянства равнодействующей такой нагрузки. В случае численного решения задачи размер площадки выбирается конечным, однако достаточно малым относительно размеров тела.

Если локальные усилия приложены на контуре тела, их можно учитывать в краевых условиях, записанных при постановке задачи.

Для учета локальных усилий используются функции вида

$$q(x,y) = C\cos^k \frac{\pi}{2}\frac{f(x,y)}{f_{\max}},$$
$$f_{\max} = \max_{(x,y)\in S} |f(x,y)|,$$

где C – коэффициент, задающий равнодействующую нагрузки; S – площадь лицевой поверхности тела, отнесенная к системе координат (x, y); k – показатель степени, определяющий скорость изменения функции нагрузки вблизи кривой ее приложения, заданной уравнением $f(x, y) = 0$. Такой способ описания локальных усилий позволяет задавать произвольный вид кривой приложения нагрузки и варьировать размеры зоны нагружения.

При численном решении задач статического изгиба для сведения двумерной задачи в частных производных к задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений используется метод сплайн-коллокации в классическом [1] и модифицированном [2] виде. Рассматривается применение этого метода к задаче статического изгиба изотропной пластинки. В качестве разрешающего уравнения для определения прогиба пластинки используется уравнение Софи Жермен

$$D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) = q(x,y).$$

Если контур пластинки жестко заделан, прогиб пластинки w в соответствии с классическим методом сплайн-коллокации ищется в виде

$$w(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(y)W_i(x),$$

где $\varphi_i(y)$ – некоторые линейные комбинации базисных сплайнов, тождественно удовлетворяющие граничным условиям на краях пластинки $y=$ $=\text{const}$; $W_i(x)$ – неизвестные функции, D – жесткость пластинки на изгиб. Разрешающее уравнение и граничные условия на краях $x=\text{const}$, записанные в точках коллокации $\{y_i^*\}_{i=0}^N$ с учетом представления функции прогиба, образуют краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $W_i(x)$. Численное решение полученной задачи проводится методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова [3].

В случае исследования установившихся колебаний пластинок и оболочек при фиксированной частоте колебаний ω решение задачи проводится аналогично случаю статического изгиба. Для поиска резонансных частот применяется поиск по частоте с некоторым шагом. С целью уменьшения времени вычислений этот алгоритм был реализован в виде параллельной программы, запускаемой на вычислительном кластере.

На рис. 1 представлены графики прогиба квадратной консольной изотропной пластинки с длиной стороны 1 м в сечении $y = 0.5$ м вблизи свободного края.

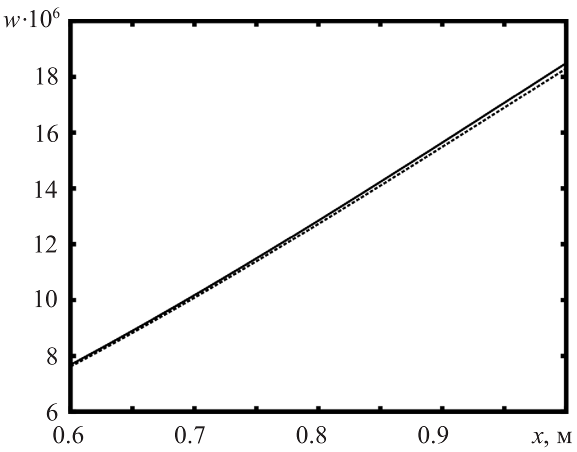

Рис. 1

Сплошная линия соответствует случаю равномерно распределенной вдоль края $x = 1$ перерезывающей силы, а пунктирная линия – приложенной вдоль того же края локальной нагрузке.

Решение задач статического изгиба и установившихся колебаний изотропных прямоугольных пластинок при локальных нагрузках подробно рассматривалось в [4, 5]. В [6] приводится пример применения данного подхода для исследования установившихся колебаний ортотропной пластинки. Вибрационный изгиб пластинок из упруго-наследственного материала рассмотрен в [7].

Список литературы

1. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) // Прикл. мех. 1995. Т. 31, №6. С. 3–27.

2. Недорезов П.Ф., Шевцова Ю.В., Ромакина О.М. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба изотропных прямоугольных пластинок // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. Второй Всерос. науч. конф. Т. 1. Самара: Самарск. техн. ун-т, 2005. С. 203–209.

3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Т. XVI, №3(99). С. 171–174.

4. Сафонов Р.А. Численное решение некоторых задач статического изгиба прямоугольных пластин под действием локальной нагрузки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Сарат. ун-т. 2009. №11. С. 133–136.

5. Сафонов Р.А. Численное исследование статического изгиба прямоугольной пластинки под действием локальной нагрузки // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды седьмой Всерос. науч. конф. с междунар. участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. Самара: СамГТУ, 2010. С. 318–321.

6. Сафонов Р.А. Численное исследование установившихся колебаний прямоугольной ортотропной пластинки при локальных воздействиях // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сб. трудов Междун. конф. Воронеж: Издательско-полиграфич. центр ВГУ, 2010. С. 325–328.

7. Недорезов П.Ф., Ромакина О.М., Сафонов Р.А. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах о колебаниях тонкой прямоугольной вязкоупругой пластинки // Изв. Саратов. гос. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, №3.

STATIC BENDING AND STEADY-STATE VIBRATIONS OF THIN RECTANGULAR PLATES AND CYLINDRICAL SHELLS UNDER LOCAL LOADS

R.A. Safonov

The work considers numerical solution of problems of static bending and steady-state vibrations of thin rectangular plates and shells under local loads specified by functions of a special type. The approach is applied to solving problems for plates of isotropic, orthotropic and viscoelastic material and isotropic cylindrical shells. The results are compared to known theoretical solutions and the results obtained by other numerical methods. Considering cylindrical shells, the results obtained for classical theory are compared with those for flat shell theory and the conclusion about the correctness of the hypothesys of flat shell theory is made.

Keywords: plates, shells, static bending, steady-state vibrations, local load.