УДК 539.376

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

А.А. Светашков, Н.А. Куприянов

Томский политехнический университет

kupr88@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Приведен приближенный метод расчета напряженно-деформированного состояния линейных и нелинейных вязкоупругих тел на основе эффективных по времени модулей. Даны оценки погрешности.

Ключевые слова: эффективные по времени модули, напряжения, деформации, перемещения, энергетическая эквивалентность, удельная потенциальная энергия, скалярное произведение, неравенство.

1. Преобразование свертки напряжений и деформаций к положительно-определенному виду

Рассмотрим определяющие уравнения линейно вязкоупругого (ЛВУ) тела

$$\sigma_{ij}(t) = C^*_{ijkl}\varepsilon_{kl};\quad C^*_{ijkl} = \int_0^t \mathrm{R}_{ijkl}(t-\tau)d\varepsilon_{kl}(\tau);$$

$$\varepsilon_{ij}(t) = S^*_{ijkl}\sigma_{kl};\quad S^*_{ijkl} = \int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau)d\sigma_{kl}(\tau)$$

$$(i, j = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Здесь R_{ijkl}, Π_{ijkl} – тензоры функций релаксации и ползучести, $\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ – тензоры напряжений и деформаций. Рассмотрим представление свертки напряжений и деформаций

$$\widetilde{W} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \int_0^t \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} + \int_0^t \varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} = \mathrm{W} + \Psi. \tag{2}$$

Здесь W, Ψ – функционалы удельных потенциальных энергий напряжений и деформаций, которые приводимы к положительно-определенному виду путем симметричного продолжения функций памяти в область $t < 0$. Доказывается, что свертку $\widetilde{W}$ напряжений и деформаций также можно представить в положительно-определенном виде

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t [\mathrm{R}_{ijkl}(t-\tau) +$$

$$+ \mathrm{R}_{ijkl}(t-s)]d\varepsilon_{ij}(\tau)d\varepsilon_{kl}(s)\quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Пользуясь свойством функций релаксации

$$\mathrm{R}_{ijkl}(t) \ge \mathrm{R}_{ijkl}(\infty) > 0,$$

можно доказать условие эллиптичности [1] ЛВУ тел:

$$\sigma_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t) \ge \alpha\varepsilon_{ij}(t)\varepsilon_{ij}(t)\quad (i, j = 1,2,3),\quad \alpha > 0.$$

2. Эффективные по времени модули ЛВУ тел

Рассмотрим случай изотропии, задав определяющие уравнения в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \Lambda^*\theta\delta_{ij}(t) + 2\mathrm{G}^*\varepsilon_{ij},$$

Λ^*, G^* – вязкоупругие операторы, аналогичные (1). Введем среду сравнения с определяющими уравнениями и сверткой вида

$$\sigma^0_{ij}(t) = \lambda(t)\theta\delta_{ij} + 2g(t)\varepsilon_{ij},\quad W_0 = \sigma^0_{ij}\varepsilon_{ij}$$

$$(i, j = 1, 2, 3), \tag{3}$$

где $\Lambda(t)$, $g(t)$ – искомые эффективные по времени характеристики. В силу положительной определенности $\widetilde{W}$, $\widetilde{W}_0$, справедливы неравенства

$$m\widetilde{W}_0 \le W \le M\widetilde{W}_0.$$

Константы m, M можно найти из решения вариационных задач вида

$$m = \min\widetilde{W}(\varepsilon_{ij}),\quad M = \max\widetilde{W}(\varepsilon_{ij}),$$

$$\widetilde{W}_0(\varepsilon_{ij}) = 1,\qquad \widetilde{W}_0(\varepsilon_{ij}) = 1. \tag{4}$$

Составим функционал $W_1(\varepsilon_{ij}) = \widetilde{W}(\varepsilon_{ij}) - \mu\widetilde{W}_0(\varepsilon_{ij})$ и потребуем выполнения необходимого условия экстремума $\delta W_1(\varepsilon_{ij}) = 0$. Тогда получим

$$\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij} = 0\quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{5}$$

Система шести уравнений (5) относительно шести компонент тензора деформаций ε_{ij} имеет два независимых решения

$$\varepsilon = \varepsilon_{ii}\quad (i = 1, 2, 3),\quad e = \varepsilon_{ij}\quad (i \ne j). \tag{6}$$

К уравнениям (5) необходимо добавить еще условие нормировки:

$$\sigma^0_{ij}\varepsilon_{ij} = 1\quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Последнее уравнение с учетом (3), (6) преобразуется к виду

$$9k(t)\varepsilon^2(t) + 12g(t)e^2(t) = 1. \tag{7}$$

Уравнения системы (5) с учетом (6) дают два уравнения относительно $\varepsilon(t)$, $e(t)$:

$$(\mathrm{K}^* - \mu k(t))\varepsilon = 0, \quad (\mathrm{G}^* - \mu g(t))e = 0, \qquad (8)$$

$$\mathrm{K}^* = \Lambda^* + \frac{2}{3}\mathrm{G}^*, \quad k(t) = \lambda(t) + \frac{2}{3}g(t). \qquad (9)$$

Поскольку уравнения (8), (9) не могут выполняться одновременно, то, полагая поочередно $\varepsilon =$ $= 0$, $e = 0$, получим

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \mathrm{K}^*\varepsilon/(k(t)\varepsilon(t)); \quad 9k(t)\varepsilon^2(t) = 1; \\ &\mu_2 = \mathrm{G}^* e/(g(t)e(t)); \quad 12g(t)e^2(t) = 1. \end{aligned} \qquad (10)$$

Принимая $\mu_1 = \mu_2 = 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\varepsilon(t)\mathrm{K}^*\varepsilon = 1; \quad k(t) = 1/\varepsilon^2(t); \\ &e(t)\mathrm{G}^* e = 1; \quad g(t) = 1/e^2(t). \end{aligned} \qquad (11)$$

Найденные таким способом функции времени $g(t)$, $k(t)$ названы оптимальными эффективными по времени модулями (ОЭМ).

Процедура вывода ОЭМ обобщена на случай анизотропных и нелинейных вязкоупругих сред. Тестовые расчеты с ОЭМ показали более точное совпадение с аналитическими решениями по сравнению с приближенными решениями, полученными с помощью эффективных по времени модулей других типов [2, 3].

3. Оценки для функционалов удельных потенциальных энергий

Рассмотрим неравенства вида

$$m\int_0^t \sigma_{ij}^0 d\varepsilon_{ij}(t) \le \int_0^t \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}(t) \le M\int_0^t \sigma_{ij}^0 d\varepsilon_{ij}(t) \qquad (12)$$

при $i, j = 1, 2, 3$.

При заданных $g(t)$, $k(t)$, определенных по (11), найдем константы m, M. Решая вариационную задачу на условный экстремум, аналогичную (4), получим

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{g(t)}}\mathrm{G}^*\frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{k(t)}}\mathrm{K}^*\frac{1}{\sqrt{k}}, \\ &m = \min_t(\mu_1, \mu_2), \quad M = \max_t(\mu_1, \mu_2). \end{aligned} \qquad (13)$$

Интегрируя (12) по объему V, занимаемому телом, можно найти оценки, связывающие вектор перемещений $\overline{u}^*$, соответствующий точному решению краевой задачи ЛВУ, с вектором перемещений $\overline{u}^1$, рассчитанным с помощью ОЭМ:

$$\| \overline{u}^1 - \overline{u}^* \|_0 \le q \| u^* \|_0; \quad q = \frac{M - m}{M + m}. \qquad (14)$$

Нормы, входящие в (14), соответствуют скалярному произведению, образованному по типу

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \frac{1}{2}\int_\Omega [\sigma_{ij}^0(\overline{u})\dot{\varepsilon}_{ij}(\overline{v}) + \sigma_{ij}^0(\overline{v})\dot{\varepsilon}_{ij}(\overline{u})]d\Omega$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь $\Omega = V$ $[0, T]$, где T – интервал времени, на котором рассматривается решение.

Список литературы

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Светашков А.А. // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, №1. С. 52–64.
3. Светашков А.А., Куприянов Н.А. // Физическая мезомеханика. 2010. Т. 13, №3. С. 69–73.

THE APPROACHED METHOD AND ESTIMATION OF THE CALCULATION ERROR FOR STRESS-STRAIN STATE OF VISCOELASTIC SOLIDS

A.A. Svetashkov, N.A. Kupriyanov

The approached method of the calculation of stress-strain state for linear and nonlinear viscoelastic solids on the basis of time-effective modules is presented. Estimations of an error are given.

Keywords: time-effective modules, stress, strain, displacements, energy equivalence, specific potential energy, scalar product, inequality.