

УДК 539.3,537.226.4

## ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЕГНЕТОПЬЕЗОКЕРАМИКИ ПРИ СЛОЖНОМ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

© 2011 г.

А.С. Семенов<sup>1</sup>, Х. Бальке<sup>2</sup>, Т. Вальмерспергер<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

<sup>2</sup>Дрезденский технический университет (Германия)

Semenov.Artem@googlemail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложены по аналогии с моделями теории пластичности определяющие уравнения сегнетоэластичного материала, которые позволяют описать эффекты диэлектрического и механического гистерезиса, гистерезиса в форме «бабочки», явление реполяризации и эффекты запаздывания при непропорциональном нагружении, наблюдаемые в экспериментах с поликристаллической сегнетопьезокерамикой. Для повышения эффективности методов решения нелинейных краевых задач введена векторно-потенциальная вариационная формулировка. Представлены примеры конечно-элементного решения нелинейных краевых задач при сложном многоосном переменном нагружении.

*Ключевые слова:* пьезокерамика, сегнетоэлектрик/сегнетоэластик, гистерезис, определяющие уравнения, вариационная формулировка, конечно-элементный анализ, механика разрушения.

### Введение

Современное применение поликристаллической сегнетопьезокерамики в качестве элементов сенсоров и актуаторов (топливных инжекторов, нанопозиционеров, гасителей вибраций, датчиков быстропеременных давлений), работающих в условиях больших сигналов, требующих учета нелинейного электромеханического поведения, приводит к необходимости разработки и использования в расчетах уточненных феноменологических моделей сегнетоэластичного материала и применения эффективных методов решения нелинейных связанных краевых задач.

### Определяющие уравнения

Формулировка определяющих уравнений сегнетоэластичного материала получена с использованием аналогии с теорией пластического течения с кинематическим упрочнением и является развитием модели, предложенной в [1]. Рассматриваемая трехмерная феноменологическая модель основана на априорном удовлетворении принципам термодинамики и введении двух термодинамических потенциалов: свободной энергии  $\Psi$  и потенциала диссипации  $\delta$ , соответствующих трансверсально-изотропному материалу. Зависимость от истории нагружения учитывается введением двух внутренних переменных состо-

яния: тензора остаточных деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^r$  и вектора спонтанной поляризации  $\mathbf{P}^r$ .

Определяющие уравнения являются следствием условия неотрицательности диссипации и могут быть представлены в виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi = {}^4 C^D \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r) - (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r) \cdot {}^3 \mathbf{h},$$

$$\mathbf{E} = \partial_{\mathbf{D}} \Psi = -{}^3 \mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r) + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r), \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензоры деформаций и напряжений,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  – векторы индукции и напряженности электрического поля,  ${}^4 C^D$  – тензор упругих модулей (4-го ранга),  $\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – тензор диэлектрической проницаемости,  ${}^3 \mathbf{h}$  – тензор пьезоэлектрических коэффициентов (3-го ранга). Предполагается, что изменение внутренних переменных происходит при выполнении условия начала переключений

$$\Phi = \frac{3\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}}{2\sigma_0^2} + \frac{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}}{E_0^2} - 1 = 0,$$

где  $\hat{\mathbf{s}} = -\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}^r} \Psi$ ,  $\hat{\mathbf{E}} = -\partial_{\mathbf{P}^r} \Psi$ . Уравнения эволюции для внутренних переменных выводятся как следствие принципа максимума диссипации при наличии ограничения  $\Phi = 0$  и могут быть записаны в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r = \lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \Phi, \quad \dot{\mathbf{P}}^r = \lambda \partial_{\mathbf{E}} \Phi, \quad (2)$$

где множитель  $\lambda$  удовлетворяет условиям нагружения/разгрузки (Куна – Таккера):  $\lambda \geq 0$ ,  $\Phi \leq 0$ ,  $\lambda \Phi = 0$ . Идентификация параметров модели связана с аппроксимацией  $\Psi$  и  $\Phi$  на следующей из

опытов при механическом, электрическом и смешанном нагружении с разгрузкой или циклическом нагружении.

### Векторно-потенциальная вариационная формулировка

Использование стандартной скалярно-потенциальной вариационной формулировки

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E}) dV = \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \delta \phi) dS \quad (3)$$

с применением скалярного потенциала  $\phi$  ( $\mathbf{E} = -\nabla \phi \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$ ) в качестве базовой электрической переменной приводит к крайне низкой скорости сходимости итерационных процедур

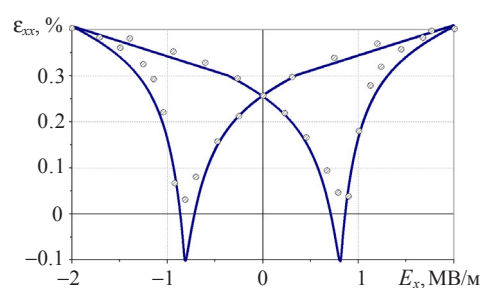
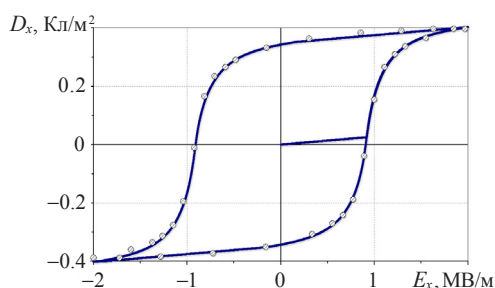


Рис. 1

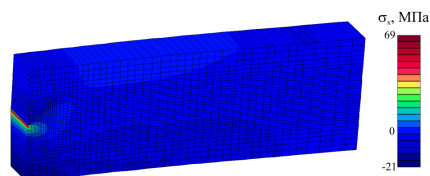
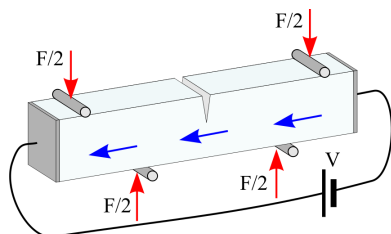


Рис. 2

нелинейного конечно-элементного (КЭ) анализа [2, 3]. Поэтому была предложена векторно-потенциальная вариационная формулировка [2]

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}) dV = \int_V \mathbf{f}_V \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{n} \times \mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{\psi}) dS \quad (4)$$

с применением векторного потенциала как базовой переменной. Использование (4) обеспечивает положительную определенность матрицы жесткости в отличие от (3). Предложенная модель (1), (2) и вариационная формулировка (4) были реализованы в КЭ программе PANTOCRATOR.

### Результаты расчетов и сопоставление с экспериментом

Результаты прогнозов предложенной модели (1), (2) (расчетные петли гистерезиса на 3-м цикле) демонстрируют (рис. 1) хорошее совпадение с экспериментом [4] (точки на рис. 1) для сегнетопьезокерамики PZT PIC151. На рис. 2 показаны результаты решения задачи о четырехточечном изгибе пьезокерамического образца с трещиной, находящегося в условиях сложного непропорционального комбинированного механического и электрического воздействия: распределение полей горизонтальных напряжений для КЭ модели 1/4 образца. Полученные в расчетах при разных комбинациях нагрузок значения прогибов и размеры зон переключений [3] коррелируют с наблюдаемыми в экспериментах [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-01-00506а) и DFG.

#### Список литературы

1. Landis C.M. // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 2002. V. 50. P. 127–152.
2. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Balke H. // Int. J. for Numerical Meth. in Eng. 2010. V. 81. P. 1298–1340.
3. Семёнов А.С. и др. // Морские интеллектуальные технологии. 2010. №1. С. 55–61.
4. Zhou D. // Report 6869. Forschungszentrum Karlsruhe. 2003. 156 p.
5. Jelitto H. et al. // J. Eur. Ceram. Soc. 2005. V. 25. P. 749–757.

**PHENOMENOLOGICAL DESCRIPTION AND NUMERICAL MODELING  
OF INELASTIC DEFORMATION OF FERROELECTRIC PIEZOCERAMICS  
UNDER COMPLEX ELECTROMECHANICAL LOADING**

*A.S. Semenov, H. Balke, T. Wallmersperger*

Constitutive equations of the ferroelectroelastic materials are introduced in analogy with equations of plastic flow theory. They allow describing effects of dielectric and mechanical hysteresis, a hysteresis in the form of «butterfly», the repolarisation phenomenon and delaying effects of non-proportional loading, observed in experiments with polycrystalline piezoceramics. To increase the efficiency of solution methods of nonlinear boundary value problems, a vector-potential variation formulation with coulomb gauge is suggested. Examples of the finite-element solution of nonlinear boundary value problems for complex multiaxial variable loading are presented.

*Keywords:* piezoceramics, ferroelectric/ferroelastic materials, hysteresis, constitutive equations, variational formulation, finite element analysis, fracture mechanics.