

УДК 539.32

## О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПУАССОНА КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА С ЦИЛИНРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ РАСТЯЖЕНИИ

© 2011 г.

*О.В. Сидоров*

Московский государственный текстильный университет

sid\_ov@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматриваются цилиндрически анизотропные однородные материалы и изделия из них. На основе теоретического анализа на примере коэффициентов Пуассона показывается, что упругие постоянные для простейшей формы изделия в виде прямого кругового цилиндра, у которого ось совпадает с осью цилиндрической симметрии материала, в общем случае не совпадают.

*Ключевые слова:* коэффициент Пуассона, цилиндрическая анизотропия, нанотрубки, волокна.

### Цилиндрически анизотропные материалы

Длительное время цилиндрически анизотропные материалы и структуры имели чисто теоретическое значение и были представлены в основном древесиной. Однако с развитием производства высокопрочных высокомодульных волокон возникла необходимость описания их структуры и свойств на основе именно цилиндрической анизотропии в силу технологии их получения (рис. 1). Коэффициенты Пуассона (КП) таких материалов измерялись на основе относительных поперечного и продольного изменения размеров волокна в области больших деформаций, при этом как методы, так и приборная база были далеки от совершенства. Связано это было, прежде всего, с малыми поперечными размерами волокон.

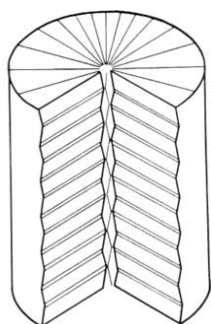


Рис. 1

С развитием производства композитов, армированных волокнами, вопрос о значениях КП волокон стал более актуальным, так как эти коэффициенты начали использовать при расчетах механических свойств композитов и конструкций из них. Потребовались и более совершенные методы их измерения. Необходимо было разработать

научно обоснованные методики [1, 2]. В связи с этим назрел вопрос о теоретических исследованиях в области определения КП цилиндрически анизотропных материалов и изделий из них. Как оказалось, даже однородные волокна круговой цилиндрической формы являются изделиями и продольные КП для них не совпадают с КП для материала, из которого получают такие волокна.

Интерес к рассмотрению КП в последнее время вызван исследованием нанотрубок (полых наностержней) и наноусов (сплошных наностержней) с размерами, превосходящими несколько нанометров, которые содержат сотни тысяч атомов. Благодаря этому становится возможным удовлетворительное описание их механических свойств с помощью методов механики сплошных сред и классической теории упругости, в частности. Для анализа наноусов и нанотрубок из различных материалов используют модель тонких стержней линейной теории упругости.

По своей структуре слоистые нанотрубки можно представить себе как нанометрового сечения кристаллические стержни из образованных сворачиванием нанопластин в цилиндры [3]. Один из типов таких нанотрубок – многослойная нанотрубка из графенов – представлен на рис. 2.

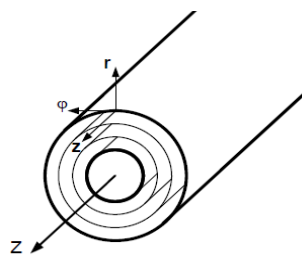


Рис. 2

Для описания механического поведения таких цилиндрически скрученных пластинок в рамках механики сплошных сред также используют модель цилиндрически анизотропного стержня.

**Теоретическая часть**

Коэффициент Пуассона определялся для прямого кругового упругого цилиндра радиуса  $R$  с цилиндрической ортотропией, к которому вдоль оси  $z$  приложена нагрузка  $P$ . Ось волокна совпадает с осью анизотропии. Расчет напряжений и деформаций велся на основе соотношений, полученных в [4, 5]. Практически все обозначения, за исключением радиуса, взяты из этих работ.

Так, исходя из соотношения для радиальной относительной деформации

$$\epsilon_r = a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (1)$$

получаем полную радиальную деформацию поверхности цилиндра

$$U(R) = \frac{PR}{T} \left[ a_{13} + \frac{h(k-1)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{ka_{33}} \right], \quad (2)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}} = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r} \cdot \frac{E_z - \nu_{zr}^2 E_r}{E_z - \nu_{z\theta}^2 E_\theta}}, \quad (3)$$

$$h = \frac{(\nu_{zr} - \nu_{z\theta})E_r E_\theta}{(E_\theta - E_r)E_z - (\nu_{zr}^2 - \nu_{z\theta}^2)E_r E_\theta},$$

а затем и относительную деформацию цилиндра в поперечном направлении вдоль радиуса

$$\epsilon(R) = \frac{P}{T} \left[ a_{13} + \frac{h(k-1)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{ka_{33}} \right]. \quad (4)$$

Так как продольная деформация вдоль оси  $z$

$\epsilon_z = a_{33}P/T$ , то исходя из классической формулы для КП цилиндра при растяжении вдоль этой оси окончательно получаем

$$\nu_f = -\frac{\epsilon(R)}{\epsilon_z} = -\frac{a_{13}}{a_{33}} - \frac{h(k-1)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}{ka_{33}^2} = \nu_{zr} + \frac{h(k-1)}{k} \left( \frac{E_z}{E_r} - \nu_{zr}^2 \right) \quad (5)$$

Как видно из формулы (5), КП для цилиндра в этом случае существенно отличается от КП для материала  $\nu_{zr}$ . Из формулы (3) для  $h$  следует, что в случае трансверсальной изотропии  $h = 0$  и оба коэффициента Пуассона совпадают.

**Выводы**

В прямом круговом упругом цилиндре коэффициенты Пуассона самого цилиндра и материала не совпадают даже в случае совпадения осей симметрии цилиндра и материала. Совпадение возможно только в случае цилиндрической трансформации.

Измерения упругих постоянных материала и изделий из него должны проводиться независимо.

*Список литературы*

1. Сидоров О.В., Щетинин А.М. // Химические волокна. 2000. №4. С. 48–51.
2. Сидоров О.В. // Наноструктурные материалы–2010: Беларусь–Россия–Украина (НАНО-2010): Тезисы II Междунар. науч. конф. Киев, 19–22 окт. 2010 г. Киев. 2010. С. 5–59.
3. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12, №5. С. 5–14.
4. Лехницкий С.Г. // ПММ. 1949. Т. 13, вып. 3. С. 307–316.
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.

**ON POISSON RATIO OF A CIRCULAR CYLINDER WITH CYLINDRICAL ANISOTROPY UNDER LONGITUDINAL EXTENSION**

*O. V. Sidorov*

The report deals with homogeneous media with cylindrical anisotropy and items made of them. It is shown in terms of the theoretical analysis that Poisson ratio and other elastic constants of such items and materials for the elementary form as the circular cylinder with the axis coinciding with the axis of cylindrical symmetry of the material generally do not coincide.

*Keywords:* Poisson ratio, cylindrical anisotropy, nanotubes, fibres.