УДК 539.375

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ТРЕХМЕРНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Б.В. Соболь

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

b.sobol@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проведен математический и численный анализ асимптотических решений трехмерных статических задач теории упругости со смешанными граничными условиями. В частности, рассмотрены аналитические решения задач для неограниченных и полуограниченных упругих тел, ослабленных системами плоских трещин, а также контактных задач. Во всех рассмотренных случаях установлена возможность использования решений плоских аналогов в качестве асимптотических оценок для трехмерных постановок задач.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, трещина, штамп, концентрация напряжений, коэффициент интенсивности напряжений, фактор влияния.

Постановки задач

Рассмотрим асимптотические решения цикла трехмерных задач теории упругости со смешанными граничными условиями.

К группе А отнесем задачи теории трещин.

1. Равновесие упругого пространства, ослабленного системой двух симметричных трещин.

2. Периодическая система (цепочка) трещин.

3. Дваждыпериодическая система трещин, расположенных в одной плоскости.

4. Равновесие упругого полупространства, ослабленного плоской трещиной или системой трещин, перпендикулярных его границе.

5. Равновесие упругого слоя, ослабленного продольной трещиной. В случае условий гладкого контакта на гранях слоя данная постановка может трактоваться как задача о равновесии упругого пространства, ослабленного триждыпериодической системой трещин.

6. Плоская поперечная трещина в упругом слое.

К группе Б отнесем контактные задачи.

1. Задача о поступательном внедрении без трения жесткого штампа в верхнюю грань упругого слоя. Рассмотрены варианты гладкого контакта нижней грани (а) и полного сцепления (б) с жестким основанием.

2. Задача о контакте системы штампов с упругим полупространством и слоем при тех же вариантах граничных условий на его нижней грани.

3. Задача о контакте штампа с гранью упругого клина. Важным частным случаем является задача о внедрении штампа в четвертьпространство (ступень).

Анализ структуры решений

Каждая из рассмотренных задач группы А применением двухмерного интегрального преобразования Фурье (в задачах 4, 6 применяется обобщенное преобразование вдоль оси, пересекающей разрез) сводится к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения [1]:

$$\Delta\iint_{\Omega}\gamma(\xi,\eta)\frac{d\xi d\eta}{R}+$$

$$+\int_{\Omega}\gamma(\xi,\eta)S(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=-\frac{2\pi}{\theta}\,p(x,y).$$

Здесь $(x,y)\in\Omega$ – область расположения трещины в плане,

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

$$\theta=\frac{E}{2(1-\nu)},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$\gamma(\xi,\eta)$ – функция раскрытия трещины, $p(x,y)$ – нагрузка, приложенная к ее берегам, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $S(x,y,\xi,\eta)$ – регулярная часть ядра уравнения, характеризующая влияние геометрических параметров задачи: размеров трещин в плане, относительных расстояний между ними и (или) до границ рассматриваемых тел.

Для случаев эллиптической в плане формы рассматриваемых областей $\Omega: l(x,y)\geq 0$ построены асимптотические решения уравнений такой структуры в виде разложений в степенные ряды по упомянутым параметрам λ_i, $i = 1, 2$. В задачах А (1–6) они имеют аналогичные представления [1]:

$$\gamma(\xi,\eta) = \frac{ap/\theta}{E(k) l^{1/2}(x,y) N},$$

$$l(x,y) = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}, \quad p(x,y) = p = \text{const}.$$

Это, в свою очередь, позволяет в каждом случае вычислить значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений при обходе по контуру трещины: $K_{IA} = K_{I\infty} N$, где $K_{I\infty}$ – соответствующая величина для задачи об изолированной эллиптической трещине в неограниченной упругой среде, $N = 1 + \sum_{k=3}^{\infty} A_k \lambda^{-k}$ – фактор влияния на коэффициент интенсивности нормальных напряжений различных параметров. Следует отметить, что аналогичные асимптотические представления фактора влияния для плоских аналогов рассматриваемых задач имеют вид [2]:

$$N^* = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \lambda^{-k}.$$

Нетрудно заметить, что влияние упомянутых параметров на решение в двухмерном случае начинается с членов порядка λ^{-2}, а в трехмерном – λ^{-3}. Именно это обстоятельство и подтверждает гипотезу о том, что плоские решения дают оценки «сверху» для трехмерных аналогов.

Каждая из задач группы Б применением соответствующих интегральных преобразований к уравнениям равновесия в перемещениях (в задачах 1 [3], 2 это – двухмерное интегральное преобразование Фурье, в задаче 3 [4] решения можно строить в виде интегралов Фурье – Конторовича – Лебедева) сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно функции контактных напряжений под штампом $q(\xi,\eta)$:

$$\iint_{\Omega} q(\xi,\eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \int_{\Omega} q(\xi,\eta) T(x,y,\xi,\eta) d\xi d\eta = \\ = 2\pi\theta\delta(x,y), \quad (x,y) \in \Omega.$$

Здесь $\delta(x,y)$ описывает поверхность штампа по глубине, регулярная часть ядра $T(x,y,\xi,\eta)$ в каждой из задач отражает влияние геометрических параметров и представляется соответствующими соотношениями [1, 2].

Применение известного асимптотического метода, развитого в работах В.М.Александрова, позволяет в случае эллиптической в плане области контакта получить решение в каждом случае в виде аналогичных асимптотических разложений [3, 4]:

$$q(x,y) = \theta\delta / a l^{1/2}(x,y) M, \quad M = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \lambda^{-k}.$$

По аналогии с задачами теории трещин назовем M фактором влияния, так как очевидно, при $\lambda \to \infty$ из этого решения вытекает известный предельный случай – решение задачи о контакте эллиптического в плане штампа с упругим полупространством.

Аналогичную структуру имеет решение задачи о контакте системы штампов с упругим слоем. При этом решение также может быть построено в виде разложения по двум независимым параметрам, характеризующим, соответственно, относительное расстояние между штампами и относительную толщину слоя.

Здесь же для сравнения приводим соответствующие решения двухмерных аналогов рассматриваемых задач. Функция контактных напряжений в каждом из этих случаев имеет следующую структуру [5]:

$$q(x,y) = P/\pi(a^2 - x^2)^{-1/2} M^*, \quad M^* = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \lambda^{-k},$$

$$P = \pi\theta\delta\left(\ln 2\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda^{-k}\right)^{-1}.$$

Аналогично задачам теории трещин проводим анализ и сравниваем в этом случае асимптотические представления решений трехмерных и соответствующих плоских контактных задач и подтверждаем получаемые результаты непосредственными вычислениями.

Выводы

1. Взаимное влияние трещин или свободных границ тел приводит, как правило, к усилению концентрации напряжений в окрестности контура каждой из них.
2. Взаимное влияние штампов приводит к снижению уровня контактных напряжений под ними, и, соответственно, к снижению концентрации напряжений в окрестности края.
3. Решения плоских задач для систем трещин представляют собой оценки «сверху» для соответствующих пространственных задач.
4. Решения плоских контактных задач позволяют оценить «снизу» соответствующие пространственные решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-08-00839-а).

Список литературы

1. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 224 с.

2. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1986. 324 с.

3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. // Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

4. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.

5. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 176 с.

ON THE ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF STATIC PROBLEMS OF THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

B.V. Sobol

The mathematical and numerical analysis of asymptotic solutions of a cycle of three-dimensional static problems of elasticity with the mixed boundary conditions is carried out. In particular, analytical solutions of problems for the unlimited and semilimited elastic bodies weakened by systems of flat cracks, and also contact problems are considered. In all the considered cases a possibility of use of solutions of flat analogues in quality asymptotic estimations for considered three-dimensional statements of problems is established.

Keywords: singular integrated equation, crack, punch, stress concentration, stress intensity factor, influence factor.