УДК 539.3

О ДЕФОРМАЦИОННОЙ СИЛЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЮ УПРУГИХ ТЕЛ

И.А. Солдатенков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

isoldat@rol.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проводится расчет деформационной составляющей силы сопротивления при скольжении штампа по упругому основанию (плоская задача). Показано, что для соблюдения закона сохранения энергии необходимо рассматривать дополнительные факторы контактного взаимодействия тел. Для штампа с фиксированной областью контакта таким фактором являются сосредоточенные силы в угловых точках, а для гладкого штампа – неравномерность распределений касательного контактного напряжения и скорости скольжения по области контакта.

Ключевые слова: контактная задача, трение скольжения, закон сохранения энергии.

Общая постановка задачи

Рассматривается двухмерная задача для деформируемого основания с прямолинейной границей, по которой равномерно скользит со скоростью V_s абсолютно жесткий штамп формы $y = g(x)$ (рис.1). Считается, что касательное контактное напряжение $q_1 = \tau_{xy}|_{y=0}$ обусловливается фрикционным взаимодействием штампа с основанием и связано с контактным давлением $p = q_2 = -\sigma_y|_{y=0}$ законом Кулона: $q_1 = \mu p$, где μ – коэффициент трения.

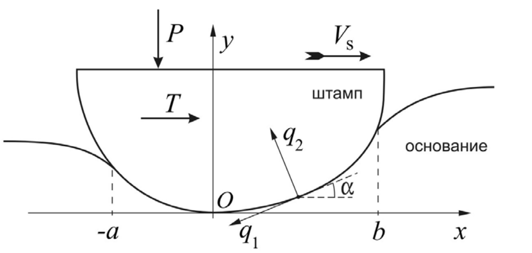

Рис. 1

Приложенная к штампу касательная сила T определяется по формуле

$$T = \mu P + (1+\mu^2)\psi, \quad \psi = \int_{-a}^{b} q_2(x) g'(x)dx, \qquad (1)$$

где ψ – деформационная сила сопротивления скольжению штампа. Согласно формуле (1), приложенная к штампу касательная сила T отличается от номинальной силы μP кулонового трения на величину $(1 + \mu^2)\psi$, обусловленную деформацией основания. Использование формулы (1) без учета дополнительных факторов может приводить к парадоксальным заключениям, противоречащим закону сохранения энергии.

Задача без трения для полуплоскости

В случае безфрикционного ($\mu = 0$) скольжения штампа по упругой полуплоскости, используя решение соответствующей контактной задачи [1], можно получить

$$\psi = -\frac{1}{\pi\theta} A_0 \left(A_1 - \frac{1}{2}(b-a)A_0 + P \right),$$
$$A_n = -\theta \int_{-a}^{b} \frac{x^n g'(x)dx}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}, \quad \theta = \frac{E}{2(1-\nu^2)}. \qquad (2)$$

Формула (2) свидетельствует о возможности существования отличной от нуля деформационной силы ψ сопротивления скольжению штампа с угловыми концами, для которого $A_{0,1} \neq 0$ (для гладкого штампа $\psi = 0$). Такой результат представляется парадоксальным с точки зрения закона сохранения энергии, так как не ясно, откуда берется ($\psi < 0$) и на что расходуется ($\psi > 0$) работа по перемещению штампа при отсутствии производства и диссипации энергии. Решение полученного парадокса следует искать в существовании некоторых сосредоточенных касательных сил $\psi_\pm$, приложенных к угловым концам штампа и компенсирующих касательную силу ψ, образованную в пределах области контакта. Эти силы могут обусловливаться боковым воздействием на штамп сингулярно деформированной полуплоскости в окрестностях $x = -a - 0, x = b + 0$.

Для определения сил $\psi_\pm$ вычислим деформационные силы $\widetilde{\psi}_-$ и $\widetilde{\psi}_+$ сопротивления скольжению гладкого штампа на участках $(-c, -a)$ и (b, d) соответственно (рис. 2).

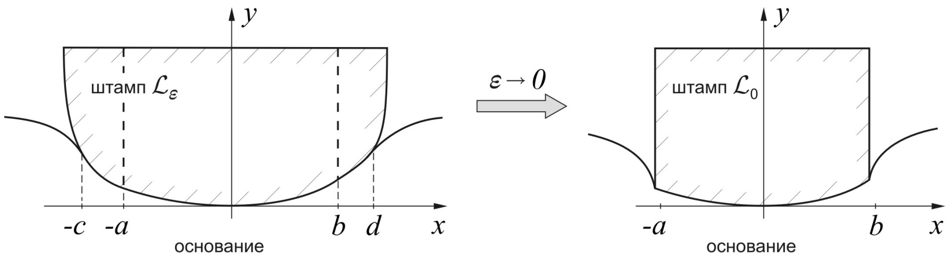

Рис. 2

Осуществим предельный переход к штампу с угловыми концами (см. рис. 2) и положим $\psi_\pm = \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\psi}_\pm$. В результате получается следующая формула:

$$\psi_\pm = \pm \frac{1}{2\pi\theta(a+b)} C_\pm^2, \quad C_- = P - bA_0 + A_1,$$
$$C_+ = P + aA_0 + A_1.$$

Можно убедиться, что равнодействующая $\psi_- + \psi_+$ угловых сил $\psi_\pm$ в точности компенсирует деформационную силу вида (2), образованную в пределах области контакта.

Гладкий штамп с трением

В случае фрикционного скольжения гладкого штампа по упругому основанию (см. рис. 1) локальная скорость скольжения изменяется по закону [2]: $V(x) = V_s(1 + u'(x))$, а мощность M_T внешней касательной силы T складывается из мощности $M_1 = Q_1 V_s$ суммарной силы трения Q_1 и мощности $M_\psi = \psi V_s$ деформационной силы ψ: $M_T = M_1 + M_\psi$. Последнее равенство означает, что, если потери на трение определять через работу суммарной силы трения, то работа внешней силы T только частично расходуется на покрытие фрикционных потерь. В связи с этим возникает парадоксальный вопрос: куда расходуется остаток M_ψ мощности M_T, при том, что диссипация энергии в упругом основании отсутствует?

Для устранения этого противоречия потери на трение следует определять с учетом неравномерности распределений по области контакта касательного напряжения q_1 и скорости V относительного скольжения. А именно, представим скорость $\dot{D}_1$ потерь энергии на трение в виде

$$\dot{D}_1 \equiv \int_{-a}^{b} q_1(x)V(x)dx = M_1 + V_s \int_{-a}^{b} q_1(x)u'(x)dx.$$

По закону сохранения энергии работа внешней силы T расходуется на трение, поэтому $M_T = \dot{D}_1$. Можно показать, что это равенство действительно выполняется в силу соотношения

$$\int_{-a}^{b} q_1(x)u'(x)dx = \int_{-a}^{b} q_2(x)v'(x)dx,$$

выражающего принцип возможной работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №09-08-00901, 10-08-92001).

Список литературы

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
2. Ишлинский А.Ю. О проскальзывании в области контакта при трении качения // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. №6. С. 3–15.

ON THE DEFORMATION FORCE OF RESISTANCE TO SLIDING OF ELASTIC BODIES

I.A. Soldatenkov

The deformation component of the force of resistance to sliding of a stamp on an elastic foundation is calculated (plane problem). It is shown, that for the energy conservation law to be valid, additional factors of contact interaction must be taken into account. In the case of a stamp with a fixed contact area the tangential forces applied to the angular ends of stamp represent such a factor. In the case of a smooth stamp, the non-uniformity of the tangential contact stress and sliding velocity distributions over contact area is such a factor.

Keywords: contact problem, sliding friction, energy conservation law.