УДК 539.3

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Л.В. Степанова

Самарский госуниверситет

lst@ssu.samara.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложен и развит метод возмущений для решения нелинейных задач на собственные значения, следующих из: 1) проблемы определения полей напряжений, деформаций и сплошности в окрестности вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями при использовании кинетического уравнения, задающего степенной закон накопления повреждений; 2) задачи об усталостном росте трещины в линейно упругом материале в среде с поврежденностью со степенным эволюционным уравнением накопления повреждений. Найдена точная зависимость собственного значения от показателя нелинейности материала в случае антиплоского сдвига. Получено новое аналитическое решение задачи о росте трещины в среде с поврежденностью в условиях усталостного нагружения. Показано, что предложенный метод позволяет эффективно решать нелинейные задачи на собственные значения, к которым приводят современные математические модели процессов деформирования, накопления повреждений и развития дефектов в деформируемых твердых телах.

Ключевые слова: нелинейная задача на собственные значения, метод возмущений, асимптотическое решение задачи о трещине в нелинейных средах.

О проблеме собственных значений

В задачах определения полей напряжений и деформаций (скоростей деформаций) в непосредственной окрестности вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими соотношениями (степенной закон упрочнения, степенной закон теории установившейся ползучести), а также при использовании степенных вариантов эволюционных уравнений накопления повреждений в металлах и конструкционных сплавах решение разыскивается на основе метода разделения переменных. При этом предполагается степенная зависимость искомых физических величин (компонентов тензоров напряжения, деформации, параметра сплошности) от расстояния от кончика трещины. Метод разделения переменных приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений, зависящих от параметров, значения которых неизвестны и должны быть определены из самой задачи: функции и значения этих параметров, удовлетворяющие всем уравнениям и краевым условиям, называются собственными функциями и собственными значениями задачи. Поэтому решение многих задач нелинейной механики разрушения (задача об усталостном продвижении трещины в среде с поврежденностью в связанной постановке, автомодельная задача о трещине в среде с поврежденностью в условиях ползучести) связывается с нелинейной, вообще говоря, задачей на собственные значения, существование решения которой обеспечивает решение исходной механической проблемы [1–3]. При этом нетривиальным оказывается вопрос о множестве собственных значений в этой задаче – вопрос о спектре, определяющем возможные значения показателей степеней в решении задачи. Эти нелинейные задачи на собственные значения близки по своей природе к классическим задачам на собственные значения, которые часто встречаются в физике и технике [4]. Для них также имеет место вопрос о спектре собственных значений и этот вопрос требует детального исследования, а именно необходимо качественное изучение нелинейных задач на собственные значения [5]. В настоящем исследовании для решения нелинейных задач на собственные значения предлагается метод возмущений [6], развитый в асимптотической теории. На примере широкого класса краевых задач механики разрушения показано, что предложенный метод позволяет эффективно решать нелинейные задачи на собственные значения, к которым приводят современные математические модели процессов деформирования, накопления повреждений и развития дефектов в твердых телах.

Основные определения и постановка задачи

Одним из наиболее широко используемых на практике вариантов определяющих уравнений является степенная зависимость: степенной закон упрочнения, степенной закон установившейся ползучести. Степенной характер определяющих уравнений позволяет обратиться к представлению функции напряжений вблизи вершины трещины в полярных координатах в виде разложения по собственным функциям: $F(r, \theta) = r^{\lambda+1} f(\theta)$. В задачах о трещинах отрыва условие совместности деформаций приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$, которое вместе с краевыми условиями отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины постулирует нелинейную задачу на собственные значения. При анализе полей напряжений и деформаций у вершины трещины в среде с повреждениями наряду с асимптотическим представлением функции напряжений используется асимптотическое разложение параметра сплошности в форме $\psi(r, \theta) = r^{\mu} g(\theta)$. В этом случае условие совместности деформаций и эволюционное уравнение накопления повреждений формируют нелинейную систему уравнений относительно функций $f(\theta)$ и $g(\theta)$. Вместе с граничными условиями полученная система уравнений, содержащая два неизвестных параметра λ и μ, подлежащих нахождению в процессе решения, представляет собой нелинейную задачу на собственные значения. Задачи на собственные значения – это краевые задачи для системы p уравнений первого порядка

$$u'(x) = f(x, u, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q),$$

$$u = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}, \quad f = \{f_1, f_2, \ldots, f_p\},$$

где правые части зависят от параметров λ_r, значения которых неизвестны и должны быть определены из самой задачи; число дополнительных (краевых) условий соответственно равно $p + q$. Функции $u_k(x)$, $1 \le k \le p$, и значения параметров λ_r, $1 \le r \le \theta$, удовлетворяющие краевым условиям, называются собственными функциями и собственными значениями задачи. Наиболее употребительными численными методами решения задач на собственные значения являются метод стрельбы и разностный метод. Метод стрельбы удобно применять, если стрельба является однопараметрической. Если это требование не выполнено, то алгоритмы стрельбы сильно усложняются, становятся менее надежными и могут привести к ошибочным результатам. В настоящем исследовании используется метод возмущений, развитый в асимптотической теории и позволяющий найти аналитическое решение задачи. Аналитическое выражение для собственного значения λ как функции от показателя нелинейности материала n и от λ_0 – собственного числа, отвечающего невозмущенной линейной задаче ($n = 1$), находится с помощью формул

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \ldots,$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \ldots,$$

где ε – отклонение собственного значения ε от собственного значения λ_0, $f_0(\theta\ )$ – решение линейной невозмущенной задачи. В исследовании получены трехчленные асимптотические разложения для показателя нелинейности материала для различных значений собственного числа λ_0. Используя эти асимптотические разложения, можно найти аналитически оценку для собственного значения нелинейной задачи.

Результаты и выводы

С помощью предложенного метода найден спектр собственных значений в нелинейных задачах на собственные значения, вытекающих из проблем определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенными определяющими уравнениями. Метод возмущений в задаче антиплоского сдвига позволил получить точную формулу, которая выражает зависимость собственного значения, соответствующего нелинейной задаче, от показателя нелинейности материала и от собственного значения, отвечающего линейной задаче. Рассмотрена задача о продвижении усталостной трещины отрыва в связанной постановке задачи линейной теории упругости и механики поврежденности, когда параметр сплошности инкорпорирован в определяющие соотношения линейно упругого материала. Дан качественный анализ собственных значений в нелинейной задаче на собственные значения, следующей из проблемы определения полей у вершины усталостной трещины. Найдено новое асимптотическое решение задачи, которое оказалось возможным получить на основе тщательного анализа нелинейной задачи на собственные значения с помощью развитого подхода.

Работа поддержана РФФИ (проект №08-08-00971).

Список литературы

1. Bui H.D. Fracture Mechanics: Inverse Problems and Solutions. Dordrecht: Springer, 2006. 386 с.

2. Степанова Л.В. Математические методы меха-

ники разрушения. М.: Физматлит, 2009. 336 с.

3. Li J., Recho N. Methodes asymptotiques en mecanique de la rupture. Paris: Hermes Science Publications, 2002. 262 p.

4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.

5. Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2009. 216 с.

6. Степанова Л.В. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49, №8. С. 1399–1415.

ON THE METHODS OF STUDYING NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS ARISING IN THE ANALYSIS OF NONLINEAR FRACTURE MECHANICS

L.V. Stepanova

The perturbation method for studying nonlinear eigenvalue problems was proposed and developed. These problems emerge from 1) the problems of stress, strain and continuity fields definition in the vicinity of the crack peak in material with powered defining equations on use of kinetic equation driven by the powered law of accumulated damages and 2) the problems of fatigue growing of crack in linear elastic material in the damaged medium with the power law evolution of accumulating damages. The exact dependence of eigenvalue from non-linear characteristic of material in the case of a non-plane shift was achieved. It was demonstrated that the proposed method allows solving effectively the non-linear mathematical models of the processes of deformation, damage evolution and defect accumulation in deformed solid bodies.

Keywords: nonlinear eigenvalue problem, perturbation technique, asymptotic crack problem solution in nonlinear media.