УДК 539.374

УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И МЕТОД РАСЧЕТА КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО КУБА

В.В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

Stru@imach.uran.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена задача об устойчивости двухосного растяжения элементарного куба, свойства материала которого описывает потенциал, обладающий выпуклостью и вогнутостью. Монотонно возрастающая нагрузка передается через два линейно упругих стержня. Построены бифуркационные множества и сепаратриса данной градиентной механической системы. Определен момент потери устойчивости процесса деформирования. Приведен численный метод, позволяющий приближенно построить сепаратрису, избегая нелинейных уравнений равновесия.

Ключевые слова: градиентная система, разупрочнение, сепаратриса, катастрофа, матрица Гессе, предельные параметры управления.

Деформируемая механическая система является градиентной, если свойства материалов ее элементов описываются потенциалами напряжений. В зависимости от свойств этих потенциалов (выпуклости, вогнутости и т.п.) при квазистатическом возрастании параметров нагружения у системы может появиться несколько возможных положений равновесия (устойчивых или неустойчивых) и вероятна катастрофа (потеря устойчивости процесса деформирования), приводящая к разрушению. На частном примере показаны некоторые методические аспекты исследования устойчивости градиентных систем, основанные на математических методах теории катастроф [1] и теории особенностей деформируемых отображений [2].

Механическая система

Кубический элемент *3* подвергается двухосному растяжению в системе, в которой растягивающие усилия на куб передаются через стержни *1* и *2*, выполненные из линейного упругого материала (рис. 1). В недеформированном состоянии длина ребер куба равна единице. Используем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Грани куба, перпендикулярные осям Ox_1 и Ox_2, скреплены с абсолютно жесткими стенками *4* и *5* и со стержнями *1* и *2* шарнирами таким образом, чтобы в процессе двухосного растяжения вдоль осей Ox_1 и Ox_2 куб мог принимать только форму прямоугольного параллелепипеда. Грани, перпендикулярные Ox_3, свободны (см. рис. 1).

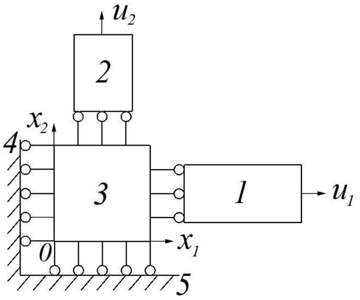

Рис. 1

Точкам свободных концов стержней *1* и *2* задаются монотонно возрастающие перемещения 1 и 2; жесткости стержней при растяжении равны λ_1 и λ_2. Нагружение системы происходит при постоянной температуре и столь медленно, что возможно пренебречь динамическими явлениями. Потенциал напряжений материала куба $\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, где ε_i, $(i = 1, 2)$ – деформации граней, имеет в пространстве $R_e^2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ области выпуклости вниз (устойчивые состояния), выпуклости вверх или невыпуклости и невогнутости (неустойчивые состояния). Эти области разделяются линиями, в точках которых матрица Гессе $H(\Pi)$ (матрица тангенциальных жесткостей) вырождена.

Бифуркационные множества и сепаратрисса

Поведение системы описывает ее потенциальная функция

$W = 0.5\lambda_1(u_1 - \varepsilon_1)^2 + 0.5\lambda_2(u_2 - \varepsilon_2)^2 + \Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,
где первые слагаемые – энергия упругих деформаций стержней. Величины ε_i суть параметры состояния, а u_i – параметры управления. Равновесие определяют критические точки функции W – решения системы уравнений

$$\nabla_2 W = 0. \qquad (1)$$

Здесь ∇_2 – оператор Гамильтона в пространстве R_e^2. Решения уравнений (1) образуют в пространстве $R_e^2 \times R_u^2$ многообразие катастроф Q_W [1]. Здесь $R_u^2 = \{u_1, u_2\}$ – пространство управлений. Многообразие Q_W содержит вырожденные критические точки функции W, в которых матрица Гессе $H(W)$ вырождена. Эти точки структурно неустойчивы. При возмущении потенциальной функции в такой точке она расщепляется на несколько невырожденных. Следовательно, в вырожденной критической точке происходит катастрофическая смена типа равновесия [1].

С другой стороны, уравнения (1) задают отображение $\chi : R_e^2 \to R_u^2$. Матрица Якоби этого отображения совпадает с матрицей Гессе $H(W)$. Точки из R_e^2, где матрица $H(W)$ вырождена, являются критическими точками отображения χ, а их образы в R_u^2 образуют множество критических значений (рис. 2, на котором изображены линии критических значений отображения χ).

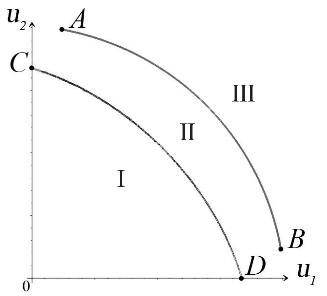

Рис. 1

При проектировании многообразия Q_W в R_u^2 вырожденные критические точки функции W также образуют линии CD и AB (см. рис. 2). Таким образом, эти линии образуют сепаратрису функции W или бифуркационные множества. Сепаратриса делит пространство R_u^2 на области единственности решений уравнений (1) (I, III) и область, где уравнение (1) имеет несколько решений.

В процессе нагружения изображающая точка в R_u^2 из области I попадает в область II, где система имеет несколько положений равновесия (устойчивых и неустойчивых). Согласно принципу промедления [1], система продолжает переходить из одного устойчивого равновесия в другое. Другие равновесия не реализуются. После пересечения второй бифуркационной кривой происходит скачок, т.к. система попадает в вырожденную критическую точку функции W, а ее возмущение приводит к появлению новых устойчивых равновесных состояний, расположенных от предыдущего на некотором расстоянии.

Сепаратрису можно построить приближенно, используя следующую численную процедуру. Дискретезируем с малым шагом пространство R_e^2. В узлах сетки вычисляем дискриминант матрицы Гессе и выделяем те узлы, в которых он достаточно близок к нулю. Координаты этих узлов подставляем в уравнения равновесия и вычисляем параметры управления, им отвечающие. Полученные значения и определяют приближенный вид сепаратрисы. Следовательно, найденные параметры управления образуют множество предельных нагрузок. При этом исключается этап решения нелинейных уравнений (1).

Работы выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-96018).

Список литературы

1. Постон Т, Стюарт И. Теория катастроф и ей приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.

2. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.

STABILITY OF DEFORMATION AND A METHOD FOR THE CALCULATION OF THE FAILURE LOAD OF A FRAMED STRUCTURE REALIZING THE BIAXIAL TENSION OF AN ELEMENTARY CUBE

V.V. Struzhanov

Stability of the biaxial tension of an elementary cube problem is considered. Material properties of this cube are described by the potential. The potential possesses convexity and concavity. A monotone incremental strain is applied through two linear elastic bars. Bifurcation sets and a separatrix for this gradient mechanical system are obtained. The loss-of-stability moment of the deformation process is determined. A numerical method that permits to construct the separatrix approximately without a nonlinear equilibrium equation is presented.

Keywords: gradient system, softening, separatrix, catastrophe, matrix Hesse, extreme control parameters.