Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с.1794–1796

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О ВОЗДЕЙСТВИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ НА МОМЕНТНО УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Е.М. Суворов, Г.В. Федотенков

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

tdv@mai.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается плоская задача типа Лэмба при учете асимметричных свойств сплошной упругой среды. К границе полуплоскости приложена нестационарная поверхностная нагрузка в виде произведения дельта-функций Дирака от пространственной координаты и времени. Для описания движения используется общий случай модели Коссера, в которой вектор упругих смещений не связан с псевдовектором микроповорота. Для нахождения решения используется совместное интегральное преобразование Фурье – Лапласа. Для построения оригиналов применяется алгоритм совместного обращения, основанный на аналитических представлениях изображений.

Ключевые слова: полуплоскость, моментно упругая среда, нестационарная поверхностная нагрузка, преобразование Фурье – Лапласа, аналитические представления.

Постановка задачи

Рассматривается однородная изотропная моментно упругая полуплоскость со свободной границей, первоначально находящейся в покое. Решение задачи ищется в декартовой прямоугольной системе координат Oxz. Ось Ox направлена вдоль свободной границы полуплоскости, а Oz – вглубь полуплоскости.

В качестве кинематических параметров, описывающих движение, выступает вектор перемещений $\mathbf{u} = (u, 0, w)$ и псевдовектор микроповоротов $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$. В силу плоской постановки все заданные и искомые функции зависят от координат x, z и времени. Предполагается отсутствие внешних массовых сил и изменения температуры.

Распространение возмущений в полуплоскости описывается уравнениями относительно векторов перемещений и микроповоротов движения среды Коссера [1]. С учетом плоской постановки задачи они имеют вид:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}-(\mu+\alpha)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}+2\alpha\operatorname{rot}\omega=\rho\ddot{\mathbf{u}},\\ (\beta+2\gamma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\omega-(\gamma+\varepsilon)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\omega+\\ +2\alpha\operatorname{rot}\mathbf{u}-4\alpha\omega=J\ddot{\omega}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь λ, μ – параметры Ламе; α, β, γ, ε – дополнительные физические параметры среды при учете моментных эффектов; ρ – плотность; J – объемная плотность момента инерции (мера инерции среды при вращении).

Ненулевые компоненты несимметричного тензора деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ и тензора изгиба-кручения $\boldsymbol{\chi}$ связаны с компонентами векторов перемещений и микроповорота следующими соотношениями [1]:

$$\begin{gathered}\gamma_{xx}=\partial u/\partial x,\quad \gamma_{zz}=\partial w/\partial z,\quad \gamma_{xz}=\partial w/\partial x+\omega,\\ \gamma_{zx}=\partial u/\partial z-\omega,\quad \chi_{xy}=\partial\omega/\partial x,\quad \chi_{zy}=\partial\omega/\partial z.\end{gathered} \tag{2}$$

Связи ненулевых компонент несимметричных тензоров напряжений σ и моментов напряжений с компонентами тензоров деформаций и изгиба-кручения имеют вид [1]:

$$\begin{gathered}\sigma_{xx}=(\lambda+2\mu)\gamma_{xx}+\lambda\gamma_{zz},\quad \sigma_{xy}=\lambda(\gamma_{xx}+\gamma_{zz}),\\ \sigma_{zz}=(\lambda+2\mu)\gamma_{zz}+\lambda\gamma_{xx},\\ \sigma_{xz}=(\mu+\alpha)\gamma_{xz}+(\mu-\alpha)\gamma_{zx},\\ \sigma_{zx}=(\mu+\alpha)\gamma_{zx}+(\mu-\alpha)\gamma_{xz},\\ \mu_{xy}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{xy},\quad \mu_{yz}=(\gamma-\varepsilon)\chi_{zy},\\ \mu_{yx}=(\gamma-\varepsilon)\chi_{xy},\quad \mu_{zy}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{zy}.\end{gathered} \tag{3}$$

Решение задачи будем искать в безразмерной форме. Для этого введем следующие обозначения (штрихом обозначены размерные величины; $\alpha, \beta = x, y, z$):

$$x=\frac{x'}{L},\quad z=\frac{z'}{L},\quad \tau=\frac{c_1 t}{L},\quad u=\frac{u'}{L},\quad w=\frac{w'}{L},$$

$$\omega'=\omega,\quad \alpha_1=\frac{2\alpha}{\rho c_1^2},\quad \alpha_2=\frac{2\alpha L^2}{c_3^2 J},$$

$$\alpha_2=\frac{4\alpha L^2}{c_3^2 J},\quad \eta_1^2=\frac{c_1^2}{c_2^2},\quad \eta_2^2=\frac{c_1^2}{c_3^2},$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{\lambda + 2\mu}, \quad \mu_{\alpha\beta} = \frac{\mu'_{\alpha\beta} L}{\gamma + \varepsilon}, \quad \chi_{\alpha\beta} = L\chi'_{\alpha\beta}. \qquad (4)$$

Здесь L – характерный линейный размер;

$c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad c_2^2 = (\mu + \alpha)/\rho, \quad c_3^2 = (\gamma + \varepsilon)/J$ – квадраты скоростей волн растяжения-сжатия, сдвига и кручения соответственно.

В начальный момент времени к границе полуплоскости прикладывается сосредоточенная нормальная поверхностная нагрузка вида

$$q = \delta(x)\delta(\tau). \qquad (5)$$

Введем обозначения:

$$\Omega_1 = \Delta - \eta_1^2 \partial^2/\partial\tau^2, \quad \Omega_2 = \Delta - \eta_2^2 \partial^2/\partial\tau^2 - \alpha_3,$$
$$\Omega_3 = \Delta - \partial^2/\partial\tau^2.$$

Исключая из (1) сначала $\boldsymbol{\omega}$, а затем $\mathbf{u}$, получаем два независимых уравнения в безразмерных величинах:

$$(\Omega_1\Omega_2 + \alpha_1\alpha_2\Delta)\mathbf{u} +$$
$$+ [(\eta_1^2 - 1)\Omega_2 - \alpha_1\alpha_2]\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad (6)$$
$$(\Omega_1\Omega_2 + \alpha_1\alpha_2\Delta)\omega = 0.$$

Разложим вектор перемещений на потенциальную и соленоидальную составляющие:

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\psi. \qquad (7)$$

Здесь φ – скалярный, а $\boldsymbol{\psi}$ – векторный потенциал, который вследствие плоской постановки задачи имеет одну, отличную от нуля, компоненту $\boldsymbol{\psi} = (0,\ \psi,\ 0)$. С использованием этого представления из первого уравнения (6) получаем два скалярных уравнения относительно потенциалов и эквивалентное второму равенству (6) скалярное уравнение относительно ненулевой компоненты вектора микроповорота:

$$\Omega_3\varphi = 0, \quad (\Omega_1\Omega_2 + \alpha_1\alpha_2\Delta)\psi = 0,$$
$$(\Omega_1\Omega_2 + \alpha_1\alpha_2\Delta)\omega = 0. \qquad (8)$$

Заметим также, что подстановка представления (7) в первое уравнение (1) приводит к равенству, связывающему ненулевые компоненты вектора микроповорота и векторного потенциала:

$$\omega = \alpha_1^{-1}(\eta_1^2\ddot{\psi} - \Delta\psi). \qquad (9)$$

Следовательно, в плоской постановке задачи из первого и второго уравнений (8) можно получить потенциалы, а ненулевая компонента вектора микроповорота затем определяется соотношением (9). Этот факт уменьшает количество неопределенных постоянных и приводит к соответствию полученных решений граничным условиям в напряжениях.

Ввиду отсутствия касательных напряжений и моментных напряжений на границе полуплоскости с учетом (5), предполагая ограниченность векторов перемещения и микроповорота в бесконечно удаленной точке, приходим к следующим граничным условиям:

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} = \delta(x)\delta(z), \quad \sigma_{zx}\big|_{z=0} = 0, \quad \mu_{zy}\big|_{z=0} = 0,$$
$$\varphi\big|_{r\to\infty} = 0, \quad \psi\big|_{r\to\infty} = 0, \qquad (10)$$
$$\omega\big|_{r\to\infty} = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

В начальный момент времени возмущения в полуплоскости отсутствуют, что соответствует однородным начальным условиям:

$$\varphi\big|_{\tau=0} = \psi\big|_{\tau=0} = \omega\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}\big|_{\tau=0} = \dot{\psi}\big|_{\tau=0} =$$
$$= \dot{\omega}\big|_{\tau=0} = \ddot{\psi}\big|_{\tau=0} = \dddot{\psi}\big|_{\tau=0} = 0. \qquad (11)$$

Метод решения

Применяя к первому и второму уравнениям (8) преобразование Фурье по координате x и преобразование Лапласа по времени, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения в пространстве изображений Фурье – Лапласа. Ограниченные на бесконечности решения имеют вид (q, s – параметры преобразований Фурье и Лапласа соответственно; Φ, Ψ – изображения Фурье – Лапласа скалярного и ненулевой компоненты векторного потенциалов соответственно):

$$\Phi(q,z,s) = C_1 e^{-k_1 z}, \quad \Psi(q,z,s) = C_2 e^{-k_2 z} + C_3 e^{-k_3 z},$$
$$k_1^2 = q^2 + s^2,$$
$$k_{2,3}^2 = q^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)s^2/2 - (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)/2 \pm \qquad (12)$$
$$\pm[((\eta_1^2 - \eta_2^2)s^2 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)^2/4 - \alpha_1\alpha_2\eta_1^2 s^2]^{1/2}.$$

Изображение Ω функции ω определяется из (9) с помощью (12). Затем из первых трех граничных условий (10) определяются постоянные C_1, C_2, C_3. Оригиналы находятся с помощью специально разработанного алгоритма совместного обращения.

Авторы выражают благодарность доктору физико-математических наук, проф. Д.В. Тарлаковскому за консультации по настоящему исследованию.

Список литературы

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

A PLANE NONSTATIONARY PROBLEM OF THE EFFECT OF SURFACE LOAD ON A MOMENT-ELASTIC HALF-PLANE

E.M. Suvorov, G.V. Fedotenkov

A plane problem of the type of Lamb for the asymmetric properties of a solid elastic medium is described. Unsteady surface pressure in the form of the product of Dirac delta function of the spatial coordinate and time is applied on the boundary of the half-plane. The general case of the Cosserat model in which the elastic displacement vector is not associated with pseudo vector micro rotation, is used to describe the motion. A joint integral Fourier – Laplace transform is used to find the solutions. An algorithm for joint treatment based on analytical representations of the transforms is used to construct the originals.

Keywords: half-plane, the moment-elastic medium, nostationary surface load, Fourier – Laplace transform, analytical representations.