УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ МКЭ

Л.У. Султанов

Казанский федеральный университет

Lenar.Sultanov@ksu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается методика исследования конечных деформаций с использованием левого тензора Коши – Грина. Дается кинематика среды, напряженное состояние описывается истинным напряжением Коши – Эйлера. Численная реализация основана на методе конечных элементов в рамках инкрементального метода. Приводятся численные примеры.

Ключевые слова: конечные деформации, упругость, пластичность, метод конечных элементов.

Кинематика среды

Кинематика среды описывается с помощью тензора градиента деформаций (F). При моделировании упругопластических деформаций используется мультипликативное разложение тензора градиента полных деформаций в виде произведения градиента упругих и пластических деформаций. При таком разложении вводится промежуточное состояние, соответствующее состоянию при снятии нагрузки.

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются левый тензор Коши – Грина (мера деформации Фингера) (B), тензор пространственного градиента скорости (h), тензор деформации скорости (d) = $= 1/2[(h) + (h)^T]$.

Для каждого состояния вводятся соответствующие градиенты деформаций и меры деформаций (F^e), (F^p), (B^e), (B^p) и т.д. В соответствии с мультипликативным разложением используются аналоги тензоров пространственного градиента скоростей, деформации скорости и скорости поворота для упругих и пластических скоростей деформаций.

Определяющие соотношения

Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений $(\Sigma) = \sigma_{ij}\mathbf{e}_{ij}$, определенного в актуальном состоянии. Также в рассмотрение вводится тензор напряжений Кирхгофа $(\tau) = J(\Sigma)$, который относится к конфигурации начального состояния, здесь $J = \rho/\rho_0 = = d\Omega/d\Omega_0$ – относительное изменение объема.

Физические соотношения строятся из законов термодинамики в предположении существования уравнения предельного состояния. Функционал свободной энергии зависит лишь от упругих деформаций. Из второго закона термодинамики также получено диссипативное неравенство. Условие упругого состояния записывается в обычной форме (функция текучести зависит от главных напряжений и параметра изотропного упрочнения).

Алгоритм расчета

Получено линеаризированное физическое соотношение в виде зависимости производной Трусделла тензора напряжений от деформации скорости:

$$(\Sigma^{Tr}) = (\dot{\Sigma}) - (h)\cdot(\Sigma) - (\Sigma)\cdot(h)^T + \\ + I_{1d}(\Sigma) = (\Lambda_\Sigma)\cdot\cdot(d). \quad (1)$$

Для решения нелинейной задачи используется инкрементальный метод. Считается, что известно k-е состояние, по которому нужно найти (k + 1)-е состояние. В качестве базового уравнения используется уравнение виртуальных мощностей, записанное для (k + 1)-го шага:

$$\iiint\limits_{\Omega_{k+1}} ({}^{k+1}\Sigma)\cdot\cdot(\delta^{k+1}d)\,d\Omega = \iiint\limits_{\Omega_{k+1}} {}^{k+1}\rho\,{}^{k+1}\mathbf{f}\cdot\delta\upsilon\,d\Omega + \\ + \iint\limits_{S^{\sigma}_{k+1}} {}^{k+1}\mathbf{t}_n\cdot\delta\upsilon\,dS, \quad (2)$$

где Ω_{k+1} – текущий объем; $S_{k\ 1}$ – часть его поверхности, на которой заданы усилия; ${}^{k+1}\mathbf{f}$, ${}^{k+1}\mathbf{t}_n$ – векторы массовых и поверхностных сил; ${}^{k+1}\rho$ – текущая плотность.

Переходя в уравнении (2) к приращениям, например, для напряжений можно записать

$$({}^{k+1}\Sigma) = ({}^{k}\Sigma) + (\Delta^k\Sigma)$$

и, имея в виду соотношение (1), получить, пренебрегая слагаемыми второго порядка, разрешающее уравнение в приращениях:

$$\iiint\limits_{\Omega_k} \{({}^k d)\cdot\cdot({}^k\Lambda_\Sigma)\cdot\cdot(\delta d) + ({}^k h)\cdot({}^k\Sigma)\cdot\cdot(\delta d) +$$
$$+ ({}^k\Sigma)\cdot\cdot({}^k h)^T\cdot\cdot(\delta d) + ({}^k\Sigma)\cdot\cdot(\delta\Delta^k d) +$$
$$+ ({}^k\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\}d\Omega = \iiint\limits_{\Omega_k} {}^k\rho[{}^k\mathbf{f}\Delta^k J + \Delta^k\mathbf{f}]\cdot\delta\upsilon d\Omega +$$
$$+ \iint\limits_{S_k^\sigma} [\Delta^k\mathbf{t}_n - {}^k\mathbf{t}_n(\Delta^k h) + {}^k\mathbf{t}_n\Delta^k J]\cdot\delta\upsilon dS. \qquad (3)$$

Решая уравнение (3), найдем вектор перемещений для текущего шага $\Delta^k\mathbf{u} = \Delta^k x_i\mathbf{e}_i$, который определяет следующую конфигурацию:

$${}^{k+1}\mathbf{r} = {}^k\mathbf{r} + \Delta^k\mathbf{u}.$$

Мера деформаций на каждом шаге вычисляется следующим образом:

$$({}^{k+1}B) = ({}^{k+1}F)\cdot({}^{k+1}F)^T = \frac{\partial^{k+1}x_i}{\partial^k x_m}\frac{\partial^{k+1}x_j}{\partial^k x_m}.$$

Для решения упругопластической задачи применяется метод предиктор–корректор. Рассматриваются два близких состояния и строятся соотношения, корректирующее напряженное состояние. Настоящая технология имеет различные названия: «радиальное возвращение на поверхность текучести» (radial return algorithm), «метод проецирования напряжений на поверхность текучести» (return mapping algorithm, projection method), метод предиктор–корректор, метод расщепления и другие. Рассмотрено применение этого метода для теории пластичности Мизеса. Вычисляются пробные меры упругих деформаций, по которым определяются тензоры напряжений. При выполнении условия пластичности пробные напряжения и меры деформаций считаются истинными. В противном случае, используя функцию текучести и уравнение стационарности, можно определить скорость пластических деформаций, с помощью которой определяются тензор меры деформации и тензор напряжений для текущего номера итерации. По достижении сходимости определяется НДС. Далее осуществляется переход к следующему шагу нагружения.

Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе полилинейной изопараметрической аппроксимации. Приводятся решения задач.

Список литературы

1. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Уч. зап. Казанс. гос. ун-та. Серия физ.-мат. науки. 2008. Т. 150, кн. 1. С. 29–37.
2. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Уч. зап. Казанс. гос. ун-та. Серия физ.-мат. науки. 2008. Т. 150, кн. 3. С. 122–132.
3. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред. Казань: КазГУ, 2009. 465 с.
4. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. 1997. 283 p.

INVESTIGATION OF ELASTIC-PLASTIC SOLIDS BY FEM

L.U. Sultanov

The algorithm for analyzing large deformations of hyperelastic solids using the left Cauchy – Green tensor is considered. The stressed state is represented by Cauchy stress. An incremental method is used. Numerical computations illustrate the potential of the described approach.

Keywords: large deformations, elastic, plastic, finite element method.