УДК 539.3

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ КОМПОЗИТОВ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ

М.А. Ташкинов, Н.В. Михайлова

Пермский государственный технический университет

m.tashkinov@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается задача вычисления полей микронапряжений и микродеформаций в матричных композиционных материалах с объемными включениями. Случайная структура композитов описывается с помощью совокупности многоточечных моментных функций. Краевая задача сводится к интегродифференциальному уравнению, решение которого ищется во втором приближении. Представлен метод получения аналитических выражений для вычисления статистических характеристик полей напряжений и деформаций.

Ключевые слова: композиты, краевая задача, случайная структура, моментные функции, поля напряжений и деформаций, функция Грина, статистические характеристики.

Адекватное описание реальных стохастических структур, исследование полей деформирования с последующей оценкой механизмов разрушения являются актуальными проблемами механики композитов. Исследование посвящено построению новых многоточечных приближенных решений краевых задач механики упругопластических композитов со случайной структурой, а также развитию методов вычисления характеристик случайных полей структурных напряжений и деформаций в композитах.

Рассматриваются матричные полидисперсные композиты со сферическими включениями, морфология которых может быть описана при помощи бесконечной совокупности многоточечных структурных моментных функций. Для математического описания композитов используется структурно-феноменологический подход, особенность которого в том, что однородные физико-механические свойства элементов структуры задаются с помощью общепринятых в механике феноменологических уравнений и критериев, а характеристики структурных полей деформирования и эффективные свойства композита вычисляются из решений краевых задач.

При решении краевой задачи выдвинуты следующие гипотезы: физические и геометрические величины, описывающие свойства композита, считаются статистически однородными и эргодическими случайными полями; адгезия между материалами компонентов по границам раздела предполагается идеальной; воздействие массовых сил на компоненты композитов не учитывается; геометрия и взаимное расположение элементов структуры предполагаются заданными и неизменяющимися в процессе деформирования, а сама среда обладает свойством макроскопической однородности.

В постановке задачи учитывается геометрия рассматриваемой структуры, которую можно описать путем введения случайной индикаторной функции $\lambda(\mathbf{r})$:

$$\lambda(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_f, \\ 0, & \mathbf{r} \in V_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где V_f – объем, занимаемый включением; V_m – объем, занимаемый матрицей; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, $\lambda'(\mathbf{r})$ – пульсация случайной индикаторной функции, имеющая вид $\lambda'(\mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{r}) - <\lambda(\mathbf{r})>$.

Поля структурных напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ и структурных деформаций $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ являются случайными однородными всюду, за исключением малой окрестности, прилегающей к границе, а краевая задача является статистически нелинейной, поскольку ее физические уравнения содержат произведение случайных полей. Один из методов решения стохастической краевой задачи теории упругости микронеоднородных сред состоит в построении системы уравнений в моментных функциях. Для статистически нелинейной краевой задачи получаем бесконечную систему уравнений (в уравнения в моментных функциях низшего порядка входят неизвестные моментные функции более высокого порядка), конечное решение которой может быть теоретически получено только путем наложения некоторых условий относительно моментных функций высокого порядка. Наибольшее распространение получил способ, основанный на том, что исходное стохастическое уравнение преобразуется в интегродифференциальное с помощью тензора Грина, а затем полученное уравнение решается методом итераций.

Представим поля структурных модулей упругости и поля перемещений в виде суммы средней составляющей и пульсации:

$$C_{ijkl}(\mathbf{r}) = \langle C_{ijkl}(\mathbf{r})\rangle + C'_{ijkl}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

$$U_m(\mathbf{r}) = \langle U_m(\mathbf{r})\rangle + U'_m(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Для изотропного тензора $\langle C_{ijmn}(\mathbf{r})\rangle$ функция Грина имеет вид:

$$G_{mk}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) = A\frac{\delta_{mk}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + B\frac{(r_m - r_{1m})(r_k - r_{1k})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}. \quad (4)$$

Возвращаясь к решению краевой задачи, для неизвестного поля $U'_i(\mathbf{r})$, получим интегродифференциальное уравнение, которое во втором приближении примет вид:

$$\frac{\partial U_i'^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} = \int_{V_1} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{1n}}((\langle C_{jnkl}(\mathbf{r}_1)\rangle +$$

$$+ C'_{jnkl}(\mathbf{r}_1))e_{kl} + C'_{jnkl}(\mathbf{r}_1)U_{k,l}'^{(1)}(\mathbf{r}_1))dV_1. \quad (5)$$

Для вычисления моментов структурных напряжений и деформаций требуется явный вид структурных моментных функций композита. Результаты решения краевой задачи во многом зависят от вида координатной зависимости структурных моментных функций. Моментные функции строятся для синтезированных трехмерных структур. Проводится их аппроксимация, которая осуществляется непрерывными функциями при помощи различных вариантов аппроксимирующих выражений:

$$f_\lambda^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| = \exp\left(-c_1\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{d_{cp}}\right)\cos\left(c_2\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2}{d_{cp}^2}\right), \quad (6)$$

$$f_\lambda^3(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) =$$
$$= \exp(-c_3(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)/(2d_{cp})) \times$$
$$\times \cos(c_4(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2 + |\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^2 + |\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2)/(2d_{cp}^2)). \quad (7)$$

Статистические характеристики в виде условных и безусловных моментов структурных напряжений и деформаций представляют собой сумму многомерных интегралов, для вычисления которых используются методы Симпсона, Монте-Карло, адаптивные методы и др. В функции Грина и ее производных присутствует сингулярность, которая мешает применить численные методы напрямую. Для решения этой проблемы используют разбиение второй производной функции Грина на сингулярную и формальную части, аналитические выражения для которых известны [1].

Рассмотрим задачу нахождения статистических характеристик для пористого композита. Поле структурных модулей упругости $C_{ijkl}(\mathbf{r})$ является статистически однородным и характеризуется следующей зависимостью:

$$C_{ijkl}(\mathbf{r}) = (1-\lambda(\mathbf{r}))C_{ijkl}^m. \quad (8)$$

При исследовании пористых композитов достаточно вычислить моменты структурных напряжений и деформаций в матрице. В качестве искомых величин возьмем средние деформации и средние напряжения в матрице, которые определяются следующими известными соотношениями:

$$\langle \varepsilon_{ij}\rangle_m = e_{ij} - \frac{1}{1-p}\langle \lambda'\varepsilon'_{ij}\rangle, \quad (9)$$

$$\langle \sigma_{ij}\rangle_m = C_{ijkl}^m e_{kl} - \frac{1}{1-p}C_{ijkl}^m\langle \lambda'(\mathbf{r})\varepsilon'_{kl}(\mathbf{r})\rangle. \quad (10)$$

Таким образом, расчеты сводятся к определению моментов вида $\langle \lambda'(\mathbf{r})\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r})\rangle$.

На основе данной методики можно получать более сложные статистические характеристики для различных по структуре и свойствам материалов при заданном напряженно-деформированном состоянии.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №08-08-00702, 10-08-96062-р_урал_а).

Список литературы

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных материалов. М.: Наука, 1977. 400 с.

HIGH-ORDER MULTIPOINT APPROXIMATIONS IN ELASTICITY THEORY BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR POLYDISPERSE COMPOSITES WITH RANDOM STRUCTURE

M.A. Tashkinov, N.V. Mikhailova

The problem of calculation of stress and strain fields in 3D matrix composites is considered. Random structure of composites is described with set of multipoint moment functions. Boundary-value problem is reduced to integral-differential equation, which is solved in the second approximation. The method of obtaining of analytical expressions for stress and strain fields statistical characteristics is presented.

Keywords: composites, boundary-value problem, stochastic structure, moment functions, stress and strain fields, Green function, statistical characteristics.