УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОГИХ УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК В РАМКАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СДВИГОВОЙ МОДЕЛИ С.П.ТИМОШЕНКО

 С.Н. Тимергалиев

Камская государственная инженерно-экономическая академия, Набережные Челны

Samat_tim@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Изучается разрешимость системы уравнений, описывающей состояние равновесия пологих упругих анизотропных оболочек с жестко заделанными краями в рамках геометрически и физически нелинейной сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Доказывается, что система уравнений при заданных граничных условиях имеет единственное обобщенное решение.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, уравнения равновесия, оболочка, краевая задача, обобщенные перемещения, обобщенное решение, интегральное представление, оператор, теорема существования.

1. Постановка задачи. Введение понятия обобщенного решения задачи

Рассмотрим уравнения равновесия упругих пологих анизотропных неоднородных оболочек типа Тимошенко:

$$(DT^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} + DG^i_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + R^i = 0, \quad i = 1,2,$$

$$(DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha^\lambda} + DB_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu} + R^3 = 0, \quad (1)$$

$$(DM^{i\lambda})_{\alpha^\lambda} - DT^{i3} + DG^i_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu} + N^i = 0, \quad i = 1,2,$$

где T^{ij} – усилия, M^{ij} – моменты; R^j $(j = \overline{1,3})$, N^i $(i = 1, 2)$ – внешние силы; $\gamma^0_{kn}, \gamma^1_{kn}$ – компоненты деформаций [1, с. 168–170, 269]:

$$\gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - G^\lambda_{jj}w_\lambda - B_{jj}w_3 + w^2_{3\alpha^j}/2 \quad (j = 1,2),$$

$$\gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G^\lambda_{12}w_\lambda - 2B_{12}w_3 + w_{3\alpha^1}w_{3\alpha^2},$$

$$\gamma^1_{jj} = v_{j\alpha^j} - G^\lambda_{jj}v_\lambda, \quad \gamma^1_{12} = \nu_{1\alpha^2} + \nu_{2\alpha^1} - 2G^\lambda_{12}\nu_\lambda,$$

$$\gamma^0_{j3} = w_{3\alpha^j} + \nu_j \ \ (j = 1,2), \quad \gamma^0_{33} = \gamma^1_{j3} \equiv 0 \ \ (j = \overline{1,3});$$

w_i $(i = 1, 2)$ и w_3 – тангенциальные и нормальное перемещения точек срединной поверхности S_0 оболочки; v_i $(i = 1, 2)$ – углы поворота нормальных сечений; B_{ij} – составляющие тензора кривизны S_0; G^k_{ij} – символы Кристоффеля; α^1, α^2 – декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω с границей Γ, гомеоморфной S_0; $\sigma^{ij} = B^{ijkn}\gamma_{kn} + \sigma^{ij}_*$ $(i \le j, k \le n; i, j, k, k = \overline{1,3})$ – определяющие соотношения; $\gamma_{kn} = \gamma^0_{kn} + \alpha^3\gamma^1_{kn}$; $2h = \mathrm{const}$ – толщина оболочки.

Край оболочки предполагается жестко защемленным:

$$w_j\,|_\Gamma = v_k\,|_\Gamma = 0, \quad j = \overline{1,3}, k = 1,2. \quad (2)$$

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия: 1) квадратичная форма $B^{knqs}\gamma_{kn}\gamma_{qs}$ положительно определена во всем объеме, занятом оболочкой; 2) Ω – односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ класса C^1_β $(0 < \beta < 1)$; 3) нелинейные части σ^{ij}_* напряжения для любых двух векторов деформации $\gamma_k = (\gamma_{k,11}, \gamma_{k,12}, \gamma_{k,13}, \gamma_{k,22}, \gamma_{k,23}, \gamma_{k,33})$, $\gamma_{k,ij} = \gamma^0_{k,ij} + \alpha^3\gamma^1_{k,ij}$, $k = 1, 2$, принадлежащих шару $\|\gamma_k\|_{W^{(1)}_p(\Omega)\times L_1[-h,h]} \le r$, удовлетворяют неравенствам

$$\left\|\sigma^{ij}_*(\gamma_1) - \sigma^{ij}_*(\gamma_2)\right\|_{W^{(1)}_p(\Omega)\times L_1[-h,h]} \le$$

$$\le \sigma_*(r)\sum_{m=0}^{1}\left\|\gamma^m_1 - \gamma^m_2\right\|_{W^{(1)}_p(\Omega)}, \quad p > 2,$$

где постоянная $\sigma_*(r)$ такова, что

$$\lim_{r\to 0}\sigma_*(r) = 0;$$

4) внешние силы R^k, $N^j \in L_p(\Omega)$, $p > 2$, $j = 1, 2$, $k = \overline{1,3}$; 5) характеристики упругости B^{1111}, B^{1212} и якобиан D имеют по α^1, α^2 частные производные первого порядка, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$, а остальные B^{ijkn} и G^k_{ij}, B_{ij} – частные производные первого порядка, ограниченные в $\overline{\Omega}$; 6) якобиан $D = D(\alpha^1, \alpha^2) > 0$ в $\overline{\Omega}$.

Определение. Будем говорить, что вектор обобщенных перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \nu_1, \nu_2)$

есть обобщенное решение задачи равновесия (1), (2), если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничному условию (2) ($W_p^{(2)}(\Omega)$ – пространство Соболева).

2. Исследование задачи (1), (2)

В основе метода исследования лежат интегральные представления для обобщенных перемещений, удовлетворяющих граничным условиям (2). Для тангенциальных перемещений и углов поворота, удовлетворяющих условиям (2), интегральные представления строятся с использованием общего решения неоднородного уравнения Коши–Римана вида $\partial\omega_j/\partial\bar{z} = \rho_j$ $(j = 1, 2)$, в котором ρ_j – произвольные комплексные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$, $p > 2$; $\omega_1 = \Omega_1(\omega_0)$, $\omega_2 = \Omega_2(\nu)$, $w_0 = (w_1, w_2)$, $\nu_0 = (\nu_1, \nu_2)$; операторы $\Omega_j f$ вводятся формулами

$$\Omega_j f = D[D_{m_j}^{1111}(f_{1\alpha^1} + f_{2\alpha^2}) + iD_{m_j}^{1212}(f_{2\alpha^1} - f_{1\alpha^2})],$$

$$m_j = 1 - (-1)^{j-1},$$

$$f = (f_1, f_2), \quad D_m^{ijkn} = \int_{-h}^{h} B^{ijkn}(\alpha^3)^m \, d\alpha^3.$$

Для прогиба интегральное представление берется в виде

$$w_3(z) = \iint_{\Omega} H(\zeta, z)\rho_3(\zeta) d\xi d\eta,$$

$$\zeta = \xi + i\eta, \; z = \alpha^1 + i\alpha^2,$$

где ρ_3 – вещественная функция пространства $L_p(\Omega)$, $p > 2$; $H(\zeta, z)$ – гармоническая функция Грина для единичного круга Ω.

Построенные таким образом интегральные представления позволяют свести систему (1) к системе нелинейных интегральных уравнений по области Ω относительно функций $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_2)$ следующего вида

$$\rho + G(\rho) = 0, \tag{3}$$

где $G(\rho)$ – нелинейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ – достаточно малое число), причем для любых $\rho^j \in L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$, принадлежащих шару $\|\rho\|_{L_p} < r$, имеет место оценка

$$\|G(\rho^1) - G(\rho^2)\|_{L_p} \le c(1 + r)(2 + r)[r + \sigma_*(r) + r\sigma_*(r)] \, \|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p} \equiv q \, \|\rho^1 - \rho^2\|_{L_p},$$

где постоянная q зависит от физико-геометрических характеристик оболочки.

Радиус r шара фиксируем так, чтобы выполнялось неравенство $q < 1$. Пусть внешние силы, действующие на оболочку, удовлетворяют условию $\|G(0)\| < (1 - q)r$. Тогда к уравнению (3) можно применить принцип сжатых отображений [2, с. 146], согласно которому уравнение (3) в шаре $\|\rho\|_{L_p} < r$ имеет единственное решение $r \in L_p(\Omega)$, $2 < p \le 2 + \varepsilon$.

Список литературы

1. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1975. 326 с.

2. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.

THE STUDY OF THE STRESSED-STRAINED STATE OF THE GENTLY SLOPING ELASTIC ANISOTROPIC SHELLS IN THE FRAME OF S.P. TIMOSHENKO GEOMETRICALLY AND PHYSICALLY NONLINEAR SHIFT MODEL

S.N. Timergaliev

The solvability of the system of equations, which describes the state of the equilibrium of gently sloping elastic anisotropic shells with the rigidly sealed edges in the frame of S.P.Timoshenko geometrically and physically nonlinear shift model, is studied. It is proved that the system of equations with the assigned boundary conditions has a unique generalized solution.

Keywords: stress-strained state, equations of equilibrium, shell, boundary-value problem, the generalized displacements, the generalized solution, integral form, operator, the existence theorem.