Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1806–1807

УДК 539.4

НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАЗВИТИЕ ТРЕЩИНЫ В БАЛОЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Л.А. Ткачева

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

tkacheva@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Используется энергетический критерий роста трещины. Развитие трещины при фиксированной нагрузке имеет скачкообразный характер. Обнаружены два режима развития трещины. В случае линейно растущей нагрузки развитие трещины происходит плавно. Модели Эйлера и Тимошенко дают близкие результаты для тонких балок.

Ключевые слова: балочное приближение, модели Эйлера и Тимошенко, энергетический критерий, метод нормальных мод.

Нестационарная задача о развитии трещины в плоском и пространственном случае очень сложна. Балочное приближение в теории трещин значительно проще. Оно применимо при исследовании расслоения многослойных материалов и расклинивания, для расчета прочности соединения облицовочных покрытий. Исследуется нестационарное движение трещины под действием перерезывающей силы, а также под действием равномерно распределенной нагрузки, постоянной или растущей по времени.

Рассматривается упругая балка, приклеенная к жесткой плите. На некотором участке балка отслоилась (рис. 1, 2). Рассматриваются две модели балки: Эйлера и Тимошенко. Используется энергетический критерий роста трещины. В кончике трещины ставятся условия жесткого защемления.

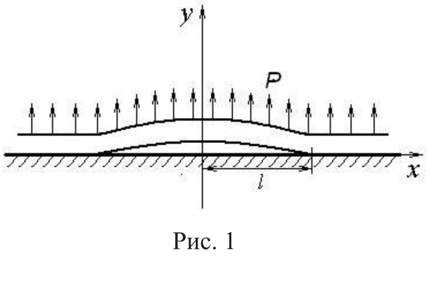

Рис. 1

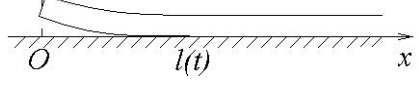

Рис. 2

Движение балки при равномерно распределенной нагрузке описывается для балки Эйлера уравнением

$$\rho hb\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=bP(t),$$

для балки Тимошенко – уравнениями

$$\rho hb\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+hbG\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=bP,\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\rho I\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}+hbG\left(\beta-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-EI\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}=0,$$

где ρ – плотность материала балки; h, b, w – толщина, ширина и прогиб балки; E – модуль Юнга; $I=bh^3/12$ – момент инерции сечения балки, G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; β – угол поворота поперечного сечения балки при пренебрежении сдвигом. Наклон касательной к балке определяется соотношением $\partial w/\partial x=\beta+\psi$, ψ – угол сдвига. В случае действия перерезывающей силы $P=0$.

Уравнение баланса энергии имеет вид:

– при равномерно распределенной нагрузке

$$b\int_{-l}^{l}P\frac{\partial w}{\partial t}dx=\frac{d}{dt}(\mathrm{T}+\Pi)+4\gamma bl'\theta(l'),$$

– при действии перерезывающей силы

$$F\frac{\partial w}{\partial t}(0,t)=\frac{d}{dt}(\mathrm{T}+\Pi)+2\gamma bl'\theta(l'),$$

где γ – плотность поверхностной энергии, высвобождающейся при распространении трещины, θ – функция Хевисайда, $l=l(t)$ – длина трещины, Т и П – кинетическая и потенциальная энергия балки. Кроме того, должно быть выполнено неравенство

$$l'(t)\geq 0, \tag{1}$$

так как образовавшаяся трещина не смыкается.

Решение задачи ищется в виде разложения по собственным функциям с коэффициентами, зависящими от времени. Для определения коэффициентов разложения получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая вместе с неравенством (1) решается методом Рунге – Кутта четвертого порядка.

Для балки Эйлера в [1] получено условие роста трещины в виде

$$\overline{M}(l,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t)\sqrt{\frac{EI}{\gamma b}} = 1.$$

Для балки Тимошенко условие роста трещины имеет вид [2]

$$K \equiv \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \frac{c_2^2}{a^2}\left[1-\frac{1}{c_2^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\left[1-\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2\right] = \frac{4\gamma b}{EI}.$$

В алгоритм решения задачи эти условия не заложены, однако они выполняются в периоды роста трещины с большой точностью, что видно из рис. 3, где приведены графики зависимости безразмерного момента $\overline{M}(t)$ от времени (кривая *1*) и скорости роста трещины $l'(t)$ (кривая *2*) при действии силы $F = 7$ Н.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Развитие трещины при фиксированной нагрузке имеет скачкообразный характер. Критическая нагрузка в этом случае примерно в два раза меньше, чем по теории равновесных трещин [3]. Обнаружены два режима развития трещины. В случае умеренной сверхкритической нагрузки периоды роста трещины сменяются периодами остановки, и затем движение трещины прекращается. При большой сверхкритической нагрузке наблюдается сильный рост трещины, вначале движение ее скачкообразно, а затем развитие становится плавным. В случае линейно растущей нагрузки критическая нагрузка соответствует теории равновесных трещин. Развитие трещин происходит плавно, скачков не наблюдается. Модели балки Эйлера и Тимошенко дают близкие результаты по скорости развития трещины для тонких балок.

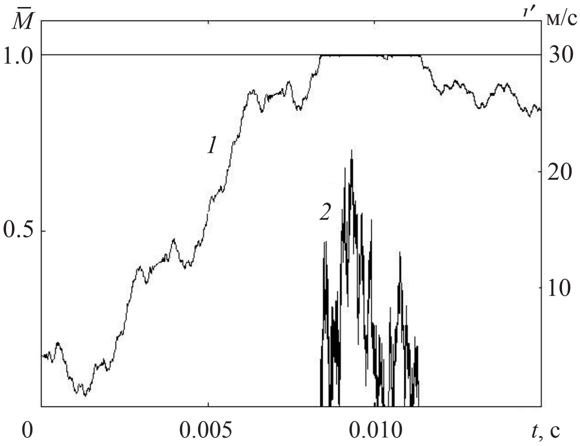

Рис. 3

Список литературы

1. Михайлов А.М. Динамические задачи теории трещин в балочном приближении // ПМТФ. 1966. №5. С. 167–172.
2. Михайлов А.М. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин // ПМТФ. 1969. №3. С. 171–174.
3. Баренблатт Г.И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. №4. С. 3–56.

UNSTEADY CRACK PROPAGATION IN THE BEAM APPROXIMATION

L.A. Tkacheva

The energy criterion of the crack growth is applied. Under the loading constant in time, the crack growth is stepwise. Two different types of the crack propagation are found. In the case of the load linearly increasing in time, the crack propagates smoothly. The models of Euler and Timoshenko give similar results for thin beams.

Keywords: beam approach, models of Euler and Timoshenko, energy, the method of normal modes.