УДК 539.3

# МНОГОУРОВНЕВЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ: ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ



***П.В. Трусов, П.С. Волегов, Е.С. Нечаева***

Пермский государственный технический университет

tpv@matmod.pstu.ac.ru

*Поступила в редакцию 15.06.2011*

Рассмотрены основные принципы построения многоуровневых конститутивных моделей с внутренними переменными. Сформулированы условия согласования моделей различных масштабных уровней. Предложено и обосновано введение несимметричных мер напряженно-деформированного состояния. Разработаны алгоритмы численной реализации предложенных моделей применительно к поликристаллическим материалам различного класса.

*Ключевые слова:* физические теории пластичности, многоуровневые модели, согласование определяющих соотношений, несимметричные меры.

В настоящее время в нелинейной механике деформируемого твердого тела одной из актуальных проблем является построение моделей, описывающих эволюцию мезо- и микроструктуры поликристаллических материалов при интенсивных пластических деформациях. Один из возможных путей построения моделей данного класса – использование многоуровневого подхода. Идея, лежащая в основе многоуровневого моделирования, заключается в описании процесса деформирования материала не только на макроуровне (как это обычно делается в механике деформируемого твердого тела), но и на более глубоких масштабных уровнях путем введения в рассмотрение механизмов деформирования и их носителей, присущих соответствующему масштабному уровню. При этом количество масштабных уровней, рассматриваемых при построении модели, выбирается в соответствии со структурой материала и определяется именно масштабом, на котором в реальном материале существуют носители деформационных механизмов, подлежащие включению в модель. Связь уровней осуществляется за счет введения в структуру определяющих соотношений на каждом масштабном уровне явных внутренних переменных, которые определяются из замыкающих уравнений в результате моделирования процесса деформирования на более глубоких по отношению к рассматриваемому масштабных уровнях и использования той или иной кинематической гипотезы (например, гипотезы Фойхта). Более подробно с основными принципами применения многоуровневого подхода при построении конститутивных моделей можно ознакомиться, например, в [1].

В рамках данного подхода на каждом из рассматриваемых масштабных уровней (макроуровне, мезоуровне) используется определяющее соотношение в виде обобщенного закона Гука в скоростной релаксационной форме с учетом геометрической нелинейности:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{\sigma}^l)^r = \mathbf{c}^l : (\mathbf{d}^l - \mathbf{d}_l^{in}),\\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^l = \boldsymbol{\Omega}^l \cdot \boldsymbol{\sigma}^l - \boldsymbol{\sigma}^l \cdot \boldsymbol{\Omega}^l - \mathbf{c}^l : (\mathbf{d}^l - \mathbf{d}_l^{in}),\end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbf{c}^l$ – тензор модулей упругости, $\mathbf{d}^l$, $\mathbf{d}_l^{in}$ – тензор деформации скорости и его неупругая составляющая, индекс $r$ означает коротационную производную, $\boldsymbol{\Omega}^l$ – спин подвижной системы координат, относительно которой определяется собственно деформационное движение, индекс $l$ обозначает номер масштабного уровня; $\mathbf{c}^l$, $\mathbf{d}_l^{in}$ и $\boldsymbol{\Omega}^l$ являются явными внутренними переменными $l$-го масштабного уровня.

## Согласование определяющих соотношений на различных масштабных уровнях

При разработке многоуровневых конститутивных моделей материалов возникает две основные проблемы: неопределенность при описании геометрической нелинейности на верхних уровнях (выбор коротационных производных в соотношении (1)); «рассогласование» напряженного состояния на различных масштабных уровнях при использовании гипотезы Фойхта об однородности деформированного состояния, то есть неравенство $\boldsymbol{\sigma}^l$ осредненным напряжениям следующего уровня $\langle\sigma^{l+1}\rangle$. Для решения обозначенных проблем представляется возможным использовать на $l$-м масштабном уровне специального вида замыкающие уравнения, обеспечивающие условия согласования $l$-го и $(l+1)$-го масштабных уровней модели, полученные авторами. Если в качестве основной гипотезы принять, что согласование напряженно-деформированного состояния (НДС) на соседних масштабных уровнях заключается в равенствах

$$<\mathbf{c}^l>=<\mathbf{c}^{l+1}>, \quad <\boldsymbol{\sigma}^l>=<\boldsymbol{\sigma}^{l+1}>, \quad <\mathbf{d}^l>=<\mathbf{d}^{l+1}>, \tag{2}$$

где $<\cdot>$ – оператор осреднения (например, по объему), то замыкающие уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^l &=< \boldsymbol{\Omega}^{l+1} > +(\boldsymbol{\sigma}^l)^{-1} \cdot < (\boldsymbol{\sigma}^{l+1})' \cdot (\boldsymbol{\Omega}^{l+1})' >, \\ \mathbf{d}_l^{in} &=< \mathbf{d}_{l+1}^{in} > +(\mathbf{c}^l)^{-1} :< (\mathbf{c}^{l+1})' : (\mathbf{d}_{l+1}^{in})' >, \end{aligned} \tag{3}$$

где штрихом обозначены отклонения от средних в рамках представительного объема соответствующего масштабного уровня. Таким образом, условие согласования НДС различных масштабных уровней приводит к конкретизации вида коротационной производной на каждом масштабе.

## Модели на основе несимметричных мер напряженного и деформированного состояния

К проблемам большинства физических теорий пластичности на данный момент можно отнести следующие: «внесение» нефизичных величин в соотношения модели при их симметризации; неоднозначность определения активных систем скольжения; невыполнение уравнений баланса момента количества движения при интенсивных пластических деформациях, сопряженных с разворотами кристаллических решеток зерен. Для устранения внутренних противоречий перечисленных физических теорий, предлагается несимметричная теория пластичности мезоуровня. Ее основные гипотезы и соотношения:

1. Несимметричную меру скорости деформации $\zeta$ можно представить в виде суммы двух составляющих: скорости обратимых деформаций $\zeta^e$ и необратимых деформаций $\zeta^p$,

$$\zeta = \mathbf{v}\hat{\nabla} = \zeta^e + \zeta^p, \tag{4}$$

где $\zeta^e = \dot{\mathbf{f}}^e \cdot \mathbf{f}^{e-1}$, $\zeta^p = \mathbf{f}^e (\dot{\mathbf{f}}^p \cdot \mathbf{f}^{p-1}) \cdot \mathbf{f}^{e-1}$.

2. Полные скорости деформации отдельных зерен $\zeta_{(n)}$ равны полной скорости деформации поликристаллического агрегата (принимается расширенная гипотеза Фойгта):

$$\zeta_{(n)} = \zeta = \mathbf{Z}, \quad \forall n. \tag{5}$$

3. Необратимые деформации осуществляются сдвигами по кристаллографическим системам скольжения, для описания процессов сдвигов используется вязкопластический закон вида

$$\dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 H(\tau^{(k)} - \tau_c^{(k)}) \left| \frac{\tau^{(k)}}{\tau_c^{(k)}} \right|^{1/m} \operatorname{sign}(\tau^{(k)}), \tag{6}$$

где $m$ – параметр чувствительности материала к скорости деформации, $\dot{\gamma}_0$ – характерная скорость сдвига, $\tau^{(k)} = \mathbf{b}_k \mathbf{n}_k : \mathbf{s}$ – действующее касательное напряжение на $k$-й системе скольжения, $\tau_c^{(k)}$ – значение критического касательного напряжения на данной системе скольжения, определяемое законом упрочнения, $H(\cdot)$ – функция Хэвисайда, $\mathbf{s}$ – девиатор напряжений.

В любой момент деформирования (скольжением дислокаций) скорость необратимых деформаций определяется выражением:

$$\zeta^p = \mathbf{f}^e \cdot \left( \sum_{k=1}^{K} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} \dot{\gamma}_0 \right) \cdot \mathbf{f}^{e-1}, \tag{7}$$

где $K$ – число активных систем скольжения. Используя скоростную форму закона Гука, можно получить выражение для скорости несимметричных напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \mathbf{c} : \left( \mathbf{v}\hat{\nabla} - \mathbf{f}^e \cdot \left( \sum_{k=1}^{K} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} \dot{\gamma}_0 \right) \cdot \mathbf{f}^{e-1} \right). \tag{8}$$

Одной из проблем несимметричных теорий является задача определения ненулевых независимых компонент тензора упругих свойств на мезоуровне. Утверждать симметрию **c** внутри пар индексов нельзя в силу несимметрии на мезоуровне мер напряженного и деформированного состояний. Показано, что даже незначительное расхождение этих компонент тензора упругих свойств существенным образом влияет на упругопластическое поведение представительного объема материала. Предложена оригинальная модель ротации кристаллической решетки.

***Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №10-08-96010-р_урал_а, 10-08-00156-а).***

*Список литературы*

1. Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Швейкин А.И. Конститутивные соотношения и их применение для описания эволюции микроструктуры // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12, №3. С. 110–119.

**MULTI-LEVEL PHYSICAL MODELS OF PLASTICITY: THEORY, ALGORITHMS, AND APPLICATIONS**

***P.V. Trusov, P.S. Volegov, E.S. Nechaeva***

The main principles of multi-level constitutive models with internal variables are considered. The conditions of consistency of models with different scale levels are formulated. Introduction of asymmetric measures of the stressed-strained state is proposed and substantiated. Algorithms for numerical implementation of the proposed models applied to polycrystalline materials of different classes are developed.

*Keywords:* crystal plasticity, multi-level models, consistency of the constitutive equations, asymmetrical measures.