Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1828–1830

УДК 539.3

О ЛИНЕАРИЗИРОВАННЫХ ЗАДАЧАХ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Г.Ф. Филатов

Воронежский военный авиационный инженерный университет

genfil@list.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрены общие соотношения теории малых деформаций, наложенных на произвольное деформированное состояние нелинейного упругого континуума Коссера. Представлены общие решения статических задач при однородной начальной деформации упругой среды Коссера со стесненным вращением. Получены характеристические определители в задачах об устойчивости полосы, о поверхностной неустойчивости. Обсуждается вопрос о возможности локальной потери устойчивости в нелинейной упругой среде с моментными напряжениями.

Ключевые слова: линеаризация, континуум Коссера, моментные напряжения, устойчивость, характеристический определитель.

Общие соотношения

Моментные теории в механике твердого деформируемого тела являются первым приближением при уточнении классической теории применительно к материалам с микроструктурой. Литература по моментным теориям практически необозрима. О притягательности моментных теорий говорит постоянно увеличивающийся поток публикаций, посвященный исследованиям в области полярных сред. Хорошие обзоры содержатся в [1–5], специальном выпуске журнала [6]. При изучении свойств материалов, испытывающих большие деформации, возрастает роль всевозможных косвенных свидетельств, результатов решений частных модельных задач. Для нелинейного моментного континуума Коссера интересны задачи, решение которых можно получить на основе метода возмущений [7]. К ним относятся задачи устойчивости и вопросы распространения сингулярных поверхностей различного порядка. В настоящем исследовании используется координатный способ представлений основных соотношений. Упругий потенциал W изотропного моментного континуума зависит в общем случае от одиннадцати базисных функций – трех инвариантов тензора деформаций Грина e_{ij}, пяти инвариантов тензора изгиба-кручения d_{ij} и трех совместных инвариантов этих тензоров [8]. Если x_i, y_i – координаты точек среды в декартовой прямоугольной системе координат в начальном недеформированном и деформированном состояниях соответственно, то определяющие соотношения для конечных деформаций псевдоконтинуума Коссера можно записать, используя результаты [5] и учитывая соотношения

$$2e_{ij} = y_{k,i}y_{k,j} - \delta_{ij}, \quad d_{ij} = \varepsilon_{imn}e_{jn,m}.$$

Здесь запятая означает дифференцирование по x, введены координаты единичного и ε-тензора. Далее рассматриваются, как обычно при получении линеаризированных уравнений, три состояния среды – начальное состояние A_0, промежуточное B, полученное из начального произвольным деформированием, и конечное A. При отыскании линеаризированных уравнений полагаем, что перемещения из промежуточного состояния B в конечное A малы. Полученные громоздкие выражения упростятся, если промежуточное состояние B – однородная деформация. В этом случае для упругой среды Коссера со стесненным вращением компоненты значений тензора напряжений Коши в состоянии A не зависят от моментных напряжений, а моментные напряжения являются функциями коэффициентов удлинения, характеризующих предварительную деформацию в состоянии B. Кроме того, для однородной начальной деформации существенными в упругом потенциале оказываются лишь пять инвариантов из упомянутых одиннадцати. Поэтому без ограничения общности в случае однородных начальных деформаций можно считать, что

$$W = W(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5), \quad I_1 = Se, \quad I_2 = Se^2,$$
$$I_3 = Se^3, \quad I_4 = Sdd^*, \quad I_5 = Sd^2.$$

Здесь звездочка означает транспонирование, S – свертку.

Для постановки задач устойчивости применим уравнения равновесия при отсутствии массовых сил и моментов при использовании тензора напряжений Коши и девиатора тензора моментных напряжений, отнесенного к текущему состоянию. В деформированном состоянии B уравнения равновесия выполнены тождественно. Для компонент $u_i(y_1, y_2, y_3)$ вектора перемещений из B в A получим линейную систему дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами. В частном случае плоской деформации эта система имеет вид

$$L_{ij}u_j = 0, \quad i, j = 1, 2,$$
$$L_{11}a = \gamma a,_{11} + (\gamma - \gamma_3)a,_{22} - \tau a,_{1122} - \theta a,_{2222},$$
$$L_{22}a = (\gamma - \gamma_2)a,_{11} + \gamma_1 a,_{22} - \tau a,_{1111} - \theta a,_{1122},$$
$$L_{12}a = \gamma a,_{12} + \tau a,_{1112} + \theta a,_{1222}.$$

Здесь запятая означает дифференцирование по текущим координатам, а все коэффициенты зависят от величины предварительной деформации и от упругих модулей различного порядка.

Представление решений линеаризованных уравнений

Полученные линеаризированные уравнения являются важным источником сведений о свойствах нелинейных моментных сред. В линейной теории упругости полярных и неполярных сред [2], в нелинейной теории упругости с однородными начальными деформациями [3] широко используется запись решений линеаризированных уравнений в операторном виде. Простота применения метода разделения переменных наиболее очевидна в пространственном случае. Используем такую форму представления решений в различных простейших краевых задачах в условиях плоской деформации. Подставим в уравнения равновесия перемещения, записанные в форме

$$u_1 = \begin{vmatrix} \varphi & L_{12} \\ \psi & L_{22} \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \varphi \\ L_{21} & \psi \end{vmatrix}.$$

Для определения потенциальных функций получим линейную систему уравнений в частных производных шестого порядка. Постоянные коэффициенты этой системы зависят от упругих постоянных и величины предварительной деформации. Иногда [3] одну из потенциальных функций можно положить равной нулю, а для определения другой применить, например, метод разделения переменных. При решении конкретных краевых задач устойчивости для выполнения граничных условий необходимо удовлетворить условию, называемому характеристическим уравнением. Это условие получено в задачах об устойчивости полосы при одноосной и двухосной нагрузке, о поверхностной неустойчивости для сжимаемых и несжимаемых сред с произвольной функцией W. При отсутствии моментных напряжений полученные характеристические уравнения совпадают с известными [3].

Отсутствие надежных результатов по определению упругих модулей среды Коссера не позволяет пока оценить количественный эффект учета влияния моментных напряжений. Он может быть заметен для тонкостенных конструкций. Для неогуковского потенциала добавка, связанная с учетом моментных напряжений, оказывает стабилизирующее влияние в задаче о поверхностной неустойчивости несжимаемого тела.

В рамках плоской деформации рассмотрен также вопрос о возможности локальной потери устойчивости свободной поверхности при сжатии [9]. В этом случае для решения линеаризированных уравнений использовалось преобразование Фурье. Из анализа полученного характеристического уравнения следует, что в зависимости от величин предварительной деформации и упругих модулей возможно локальное выпучивание.

Список литературы

1. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 416 с.

2. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1986. 383 p.

3. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 272 с.

4. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. // Изв. РАН. МТТ. 2002. №5. С. 69–82.

5. Toupin R.A. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V. 17, No 5. P. 85–112.

6. Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, №4. 124 с.

7. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. С. 208.

8. Филатов Г.Ф. // Тр. НИИ математики ВГУ. 1973. Вып. 8. С. 24–32.

9. Трофимов В.Г. // ПМТФ. 2005. Т. 46, №3. С. 149–152.

ON LINEARIZED PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY WITH COUPLED STRESS

G.F. Filatov

General equations of the theory of small deformations superposed on an arbitrary deformed state in isotropic non-linear Cosserat continuum are considered. Analytical solutions of static problems of the continuum under homogeneous initial deformation are presented. Characteristic determinants have been found for the problems of stability of a stripe. Consideration is given to the problem of surface instability. The issue of a possible local instability of Cosserat pseudocontinuum is also discussed.

Keywords: linearized problems, Cosserat pseudocontinuum, couple stress, stability, characteristic determinants.