УДК 539.3

УПРУГОСТЬ, ПЛАСТИЧНОСТЬ, ЗАПРЕДЕЛЬНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД. ПОСТРОЕНИЕ, ОБОСНОВАНИЕ И АНАЛИЗ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ В ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНИКИ

А.И. Чанышев, И.М. Абдулин

Институт горного дела СО РАН, Новосибирск

i.m.abdulin@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Для описания поведения горных пород при любом виде деформирования определяются две паспортные зависимости, одна из которых имеет вид прямой линии. Исследуется состояние запредельного деформирования для случая плоской деформации. Показывается, что оно относится к гиперболическому типу с четырьмя вещественными характеристиками. Анализируются методы решения задач.

Ключевые слова: упругость, пластичность, запредельное деформирование, построение, обоснование, анализ, определяющие соотношения.

Известно, что горные породы обладают при деформировании разносопротивляемостью при растяжении и сжатии, дилатансией. Поставлена задача описать поведение таких сред при помощи двух паспортных зависимостей, одна из которых при любом виде состояния породы представляет собой одну и ту же пропорциональную зависимость, а другая – «единую» кривую, связывающую значения эквивалентных напряжений и деформаций. Показывается, что обе эти зависимости отражают поведение некоторой блочной модели среды. На рис. 1 для песчаника представлена диаграмма изменения нормального напряжения на площадках скольжения с изменением деформации по нормали к контактам блоков. Видно, что она пропорциональна вплоть до разделения материала на части.

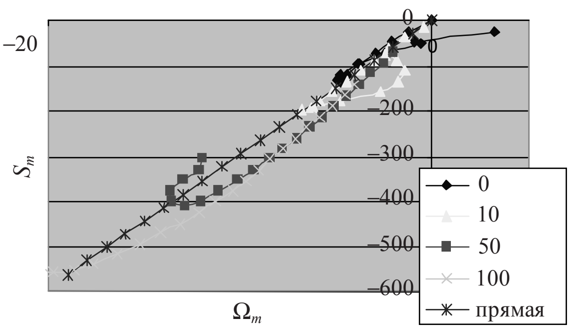

Рис. 1

На рис. 2 для песчаника представлена диаграмма изменения касательного напряжения на площадках скольжения (предельной силы трения на контактах) с ростом деформации сдвига [1–3] (использовались данные экспериментов А.Н. Ставрогина).

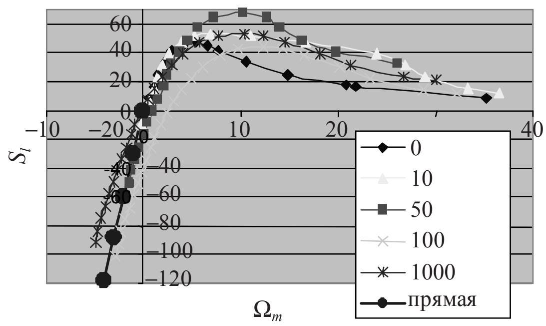

Рис. 2

Вводятся обозначения

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

– исходный тензорный базис; $S_1, S_2, \ldots, \Omega_2$ – координаты тензоров напряжений T_σ и деформаций T_ε в этом базисе;

$$S_m = S_1\cos\varphi - S_2\sin\varphi,\quad S_l = S_1\sin\varphi + S_2\cos\varphi,$$

$$\Omega_m = \Omega_1\cos\varphi - \Omega_2\sin\varphi,\ \ \Omega_l = \Omega_1\sin\varphi + \Omega_2\cos\varphi$$

– координаты тензоров T_σ, T_ε в базисе T_m, T_l, T_3 ($S_3 = \Omega_3 = 0$), где

$$T_m = T_1 \cos\varphi - T_2 \sin\varphi,$$
$$T_l = T_1 \sin\varphi + T_2 \cos\varphi.$$

Для песчаника угол φ принят равным значению $\varphi_* = 35.5^\circ$. Показано, в каком месте механической и математической модели и как используется понятие «континуальная механика сплошных сред». Анализируются данные экспериментальных исследований горных пород, таких как песчаник, каменная соль, гранит, полученные в работах А.Н. Ставрогина и других авторов.

Исследовалось применение предложенных моделей запредельного деформирования (деформационного типа, связывающих напряжения с деформациями, и типа теории пластического течения). Показано, что дифференциальная задача для запредельного деформирования относится к гиперболическому типу. При этом здесь не две, как в теории идеальной пластичности, характеристики, а четыре. Уравнения характеристик:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2,3,4} = (\mathrm{tg}(\theta+\beta)_{1,2,3,4}, \quad (\mathrm{tg}\beta)_{1,2,3,4} =$$
$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{2\Gamma/T + b\cos 2\varphi_*}{a - b\sin 2\varphi_*} + \sqrt{\frac{a+b\sin 2\varphi_*}{a-b\sin 2\varphi_*}}} \pm$$
$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{2G/T + b\cos 2\varphi_*}{a - b\sin 2\varphi_*} - \sqrt{\frac{a+b\sin 2\varphi_*}{a-b\sin 2\varphi_*}}}.$$

Соотношения на характеристиках:

$$\left(\cos 2\beta + \frac{2\mathrm{B}T}{\Gamma - CT}\right)d\sigma + dT + \frac{2T}{\sin 2\beta}\times$$
$$\times\left(\cos 2\beta + \frac{\mathrm{B}T}{\Gamma - CT}\right)d\theta - \frac{T}{\Gamma - CT\sin 2\beta}d\omega_z = 0,$$
$$\mathrm{B} = \frac{b\sin 2\varphi_*}{2}, \quad C = -\frac{1}{2}(a + b\cos 2\varphi_*),$$
$$a = \frac{1}{2\mu_*} - \frac{1}{2k}, \quad b = \frac{1}{2\mu_*} + \frac{1}{2k},$$

σ – среднее напряжение, T – максимальное касательное напряжение, ω_z – компонента вектора поворота, θ – угол, определяющий главные оси тензора напряжений, 2μ – модуль спада, $2k$ – модуль простого удлинения, Γ – величина главного сдвига. Можно видеть, что характеристики попарно ортогональны только для случая металлов, для которых угол внутреннего трения равен нулю. Четыре характеристики имеют четыре соотношения на них, связывающих четыре параметра – среднее напряжение, максимальное касательное напряжение, угол поворота, угол, задающий направление главных осей тензора напряжений. В предельном состоянии, когда сопротивление среды деформированию падает до нуля, характеристики совпадают с главными осями тензора напряжений. Показывается, что для определения четырех параметров на границе тела необходимо на ней задавать одновременно и вектор напряжений Коши, и вектор смещений. Тем самым доказывается теорема единственности решения задачи в области запредельных деформаций. Двигаясь по характеристикам, находим напряжения, деформации, смещения, границу, в которой разрушение только началось. Для решения задачи за этой границей, например в области упругости, одновременно «работают» все три формулы Колосова – Мусхелишвили. Показывается, что задача определения двух комплексных потенциалов из трех уравнений не является переопределенной, если напряжения и деформации связаны между собой законом Гука. По найденным потенциалам восстанавливаются напряжения, деформации, смещения в области упругости.

Данная методика реализована при решении задачи о сжатии плоскости с круговым отверстием с заданным распределением смещений на его контуре. Строились характеристики, соотношения, определялись искомые величины.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №09-05-00327-а), СО РАН (интеграционные проекты №61, 69, 74).

Список литературы

1. Чанышев А.И. К проблеме разрушения деформируемых сред. Ч. I. Основные уравнения // ФТПРПИ. 2001. №3. С. 53–67.

2. Чанышев А.И. К проблеме разрушения деформируемых сред. Ч. II. Обсуждение результатов аналитических решений // ФТПРПИ. 2001. №4. С. 57–66.

3. Чанышев А.И., Абдулин И.М. Характеристики и соотношения на характеристиках на запредельной стадии деформирования горных пород // ФТПРПИ. 2008. №5. С. 27–41.

ELASTICITY, PLASTICITY, POST-CRITICAL DEFORMATION OF ROCKS. CONSTRUCTION, SUBSTANTIATION AND ANALYSIS OF THE DEFINING RELATIONS WITH APPLICATION TO GEOMECHANIC PROBLEMS

A.I. Chanyshev, I.M. Abdulin

To describe behavior of rocks with any kind of deformation, two dependences are obtained, one of which is a straight line. The state of post-critical deformation for a case of plane strain is researched. It is shown that it concerns the hyperbolic type with four real characteristics. Methods for solving problems are analyzed.

Keywords: elasticity, plasticity, post-limit deformation, construction, substantiation, analysis, defining relations.