УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОСНОВАНИЙ

М.И. Чебаков

НИИ механики и прикладной математики им. И.И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

chebakov@math.sfedu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрены контактные задачи с учетом сил трения для трехслойного упругого основания, лежащего на жестком или упругом полупространстве; предполагается, что слои жестко соединены между собой и с полупространством. Подошва штампа имеет форму параболы или плоская, в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона, а на штамп действуют нормальные и касательные усилия; при этом система штамп – трехслойное основание находится в условиях предельного равновесия и штамп в процессе деформации слоя не поворачивается. Для поставленных задач с помощью аналитических вычислений впервые получены точные интегральные уравнения первого рода с ядрами в явном аналитическом виде. Изучены основные свойства ядер интегральных уравнений, показано, что числитель и знаменатель символов ядер могут быть представлены в виде разложения по произведениям степеней модулей сдвига слоев и полупространства, при этом выражения при этих произведениях содержат гиперболические и степенные функции от толщин и коэффициентов Пуассона слоев. Построены схемы решения интегральных уравнений с помощью асимптотических методов и прямого метода коллокаций. Асимптотические методы позволяют исследовать задачи для относительно малых или относительно больших толщин слоев, а предложенный алгоритм позволяет получать решение задачи практически при любых значениях исходных параметров. Производен расчет распределения контактных напряжений, размеров области контакта, взаимосвязи перемещения штампа и действующих на него сил, напряженно-деформируемого состояния во внутренних областях, особенно на границах раздела слоев с разными механическими параметрами в зависимости от геометрических и механических параметров слоев и коэффициента трения для обеспечения необходимого ресурса работы моделируемых таким образом узлов трения. Проведено сравнение результатов расчетов с результатами, полученными методом конечных элементов.

Ключевые слова: контактные задачи, трехслойное основание, трение, интегральные уравнения, аналитические методы.

Рассмотрим область $y \le h_1$, состоящую из трех слоев $0 \le y \le h_1$ (слой 1), $-h_2 \le y \le 0$ (слой 2) $-h_2 - h_3 \le y \le -h_2$ (слой 3); $-\infty < x < \infty$ (рис. 1) и полуплоскости $y \le -h_2 - h_3$, где (x, y) – декартовы координаты.

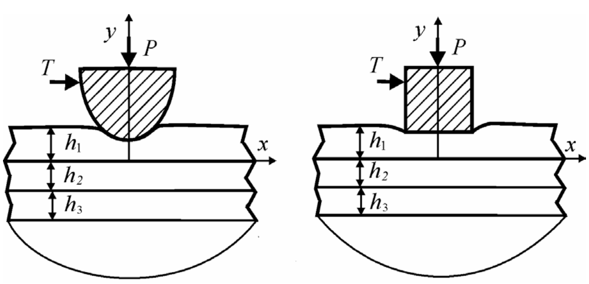

Рис. 1

Пусть слои и полупространство, имеющие разные упругие постоянные, жестко соединены между собой, а грань $y = h_1$ слоя 1 взаимодействует со штампом, находящимся под действием нормальной силы P и горизонтальной силы $T = \mu P$. Пусть в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона $\tau_{xy} = \mu\sigma_y$ (μ – коэффициент трения).

Будем рассматривать два случая: штамп имеет подошву в виде параболы с радиусом кривизны R в вершине – задача 1, и штамп имеет форму прямоугольника – задача 2. В задаче 1 зона контакта переменна, а в задаче 2 – фиксирована. Рассматривается случай предельного равновесия, сила P приложена к штампу с некоторым эксцентриситетом таким образом, что он не поворачивается в процессе деформирования слоя.

В случае плоской деформации задачи сводятся к решению уравнений Ламе при соответствующих граничных условиях.

С помощью преобразования Фурье полученные краевые задачи сводятся относительно неизвестных нормальных контактных напряжений под штампом $\sigma_y = q(x)$ к следующему интегральному уравнению (ИУ)

$$\int_{-a}^{a} q(\xi)k\left(\frac{\xi-x}{h_1}\right)d\xi = \pi\theta\delta(x) \quad (-a \le x \le b),$$

$$\theta = \frac{G_1}{1-\nu_1}, \tag{1}$$

ядро которого представимо в виде двух слагаемых

$$k(t) = k_1(t) - \varepsilon k_2(t), \quad \varepsilon = \frac{1-2\nu_1}{2(1-\nu_1)},$$

$$\delta(x) = \delta - \beta x^2 \quad \left(\beta = \frac{1}{2R}\right) \quad (\text{задача 1}),$$

$$\delta(x) = \delta \ \ (\text{задача 2}), \quad k_1(t) = \int_0^\infty \frac{L_1(u)}{u}\cos ut du, \tag{2}$$

$$k_2(t) = \int_0^\infty \frac{L_2(u)}{u}\sin ut du, \quad L_i(u) = \frac{L_{i1}(u)}{L_{i2}(u)}.$$

Здесь δ – перемещение штампа в вертикальном направлении, функции $L_{ij}(u)$ $(i, j = 1, 2)$ представимы в виде разложений по величинам относительных модулей сдвига $G_{i1} = G_i/G_1$, где G_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ – соответственно модули сдвига слоев 1, 2, 3 и полупространства

$$\begin{aligned} L_{ij}(u) = {} & n_{022}^{ij}(u)G_{31}^2G_{41}^2 + n_{031}^{ij}(u)G_{31}^3G_{41} + \\ & + n_{040}^{ij}(u)G_{31}^4 + n_{112}^{ij}(u)G_{21}G_{31}G_{41}^2 + \\ & + n_{121}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^2G_{41} + n_{122}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^2G_{41}^2 + \\ & + n_{131}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^3G_{41} + n_{140}^{ij}(u)G_{21}G_{31}^4 + \\ & + n_{202}^{ij}(u)G_{21}^2G_{41}^2 + n_{221}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2G_{41} + \\ & + n_{212}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}G_{41}^2 + n_{220}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2 + \\ & + n_{221}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2G_{41} + n_{222}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^2G_{41}^2 + \\ & + n_{230}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^3 + n_{231}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^3G_{41} + \\ & + n_{240}^{ij}(u)G_{21}^2G_{31}^4 + n_{302}^{ij}(u)G_{21}^3G_{41}^2 + \\ & + n_{311}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}G_{41} + n_{312}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}G_{41}^2 + \\ & + n_{320}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}^2 + n_{321}^{ij}(u)G_{21}^3G_{31}^2G_{41}. \end{aligned} \tag{3}$$

Функции $n_{klm}^{ij}(u)$ довольно громоздки, содержат гиперболические и степенные функции аргумента, зависят только от коэффициентов Пуассона и толщин слоев. Можно путем предельных переходов прийти к задаче для трех слоев на жестком основании. Также выполняется предельный переход к двум слоям или одному слою на жестком основании. Если положить $G_{i1} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, $G_4 = \infty$, $\nu_2 = \nu_1$, $\nu_4 = \nu_1$, получим хорошо изученную задачу для одного слоя толщины $h_1 + h_2 + h_3$. Отметим, что для задачи 2 естественно считать, что $b = a$.

Ядро ИУ (1) имеет логарифмическую особенность и для случая $G_4 = \infty$ может быть представлено в виде

$$k(t) = -\ln|t| + F(t),$$

$$F(t) = -F_1(t) + \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(t) - F_2(t), \tag{4}$$

где функции $F_i(t)$ выражаются сходящимися при любых значениях t $(-2a/h \le t \le 2b/h_1)$ интегралами

$$F_1(t) = \int_0^\infty \frac{1-L_1(u)-e^{-u}}{u}\cos ut du,$$

$$F_2(t) = \int_0^\infty \frac{1-L_2(u)}{u}\sin ut du. \tag{5}$$

Решения ИУ (2) с ядрами (4), (5) получены асимптотическими методами и методом коллокации [1-6]. На основе изложенного подхода был проведен детальный анализ напряженно-деформированного состояния трехслойного основания при различных значениях параметров задач.

Список литературы

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

2. Иваночкин П.Г., Колесников В.И., Флек Б.Н., Чебаков М.И. Контактная прочность двухслойного покрытия при наличии сил трения в области контакта // Изв. РАН. МТТ. 2007. №1. С. 183–192.

3. Александров В.М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления и трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.

4. Чебаков М.И. Взаимодействие штампа и двухслойного основания при наличии сил трения в области контакта // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2006. №1. С. 60–66.

5. Чебаков М.И. О некоторых особенностях контактного взаимодействия штампа и упругого слоя при наличии сил трения в области контакта // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2004. №3. С. 23–28.

6. Александров В.М., Клиндухов В.В. Контактная задача для двухслойного основания с неидеальной механической связью между слоями // Изв. РАН. МТТ. 2000. №3. С. 84–92.

7. Воронин В.В., Цецехо В.А. Численное решение интегрального уравнени 1 рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т. 21, №1. С. 40–53.

CONTACT PROBLEMS FOR THE THREE-LAYERED BASES

M.I. Chebakov

Contact problems are considered, taking account of friction forces for a three-layered elastic base, lying on a hard or on an elastic half-space. It is assumed that the layers are rigidly connected to each other and to the half-space. The base of the stamp is a parabola or a straight line. Normal and tangential stresses are related by the Coulomb law in the contact zone, normal and tangential forces act on the stamp, the system stamp – a three-layer base is in limiting equilibrium, stamp does not rotate in the deformation process of the layer. For the first time the exact integral equations of the first kind with kernels given in explicit analytic form are obtained for supplied problems with help of the analytical algorithm programs. The main properties of the kernels of integral equations are studied. It is shown that the numerator and denominator of the kernel symbols can be represented as an expansion of the powers products of the layers and half-space shear modules. It is shown that the expressions in these products contain hyperbolic and power functions of thickness and Poisson's ratio of the layers and half-space. Solution schemes of integral equations are built using asymptotic methods and direct collocation method. Asymptotic methods allow us to investigate the problem for relatively small or relatively large thicknesses of the layers. The proposed problem solution algorithm of the collocation method allows obtaining a solution for practically any value of initial parameters. With the help of the proposed methods the distribution of contact stresses, the sizes of the contact area, the relationship of stamp movement and acting on it forces, the stress-deformed state in the interior regions, particularly at the boundaries between layers with different mechanical parameters on depending of geometric and mechanical parameters of the layers and the coefficient friction to their optimal choice for provisioning of the required work resource of the simulated thus friction units are calculated. Comparison of the calculation results with the results obtained by finite element method is done.

Keywords: contact problems, three-layer base, friction, integral equations, analytical methods.