

УДК 539.3

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОПРОЛЁТНОГО СТЕРЖНЯ НА ГИБКИХ ОПОРАХ

© 2011 г.

Т.Ю. Чеченов

Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х.М. Бербекова, Нальчик

Tim82.82@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается устойчивость многопролетного сжатого стержня на гибких опорах. Задача на собственные значения приводит к трансцендентному характеристическому уравнению, решение которого аналитическими и численными методами сопряжено со значительными трудностями. Предлагается определять критические силы с помощью визуализации графика левой части уравнения на компьютере. На тестовом примере показана высокая степень точности получаемых критических сил. Приведен конкретный пример, демонстрирующий возможности предлагаемого алгоритма.

*Ключевые слова:* устойчивость, сжатый стержень, собственные значения, критические силы, гибкие опоры.

Расчеты на устойчивость сжатых стержней в нетрадиционных случаях (переменное сечение, промежуточные опоры и т.д.) представляют значительные сложности, так как зачастую не удается установить спектры собственных значений и форм точными методами. Между тем, для определения критических сил можно воспользоваться более простыми и эффективными способами, реализуемыми с помощью современной компьютерной графики.

Рассматривается многопролетный сжатый стержень (рис. 1) с участками  $l_j$ , имеющими разные модули Юнга  $E_j$  и моменты инерции сечений  $I_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), на гибких упругих опорах с коэффициентами жесткости на растяжение  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$  и на закручивание  $d_1, d_2$ .

координаты  $j$ -го пролета с началом на левом конце. Однородное уравнение (1) имеет общее решение

$$v_j(x_j) = A_j \sin k_j x_j + B_j \cos k_j x_j + C_j x + D_j, \quad (2)$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $A_j, B_j, C_j, D_j$  – постоянные интегрирования. Они должны удовлетворять граничным условиям на левом и правом концах:

$$\begin{aligned} b_1 v_1''(0) - d_1 v_1'(0) &= 0, \\ b_1 v_1'''(0) + c_1 v_1(0) + P v_1'(0) &= 0, \\ b_n v_n'''(l_n) - c_{n+1} v_n(l_n) + P v_n'(l_n) &= 0, \\ b_n v_n''(l_n) - d_2 v_n'(l_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и условиям сопряжения пролетов:

$$v_j(l_j) - v_{j+1}(0) = 0, \quad v_j'(l_j) - v_{j+1}'(0) = 0,$$

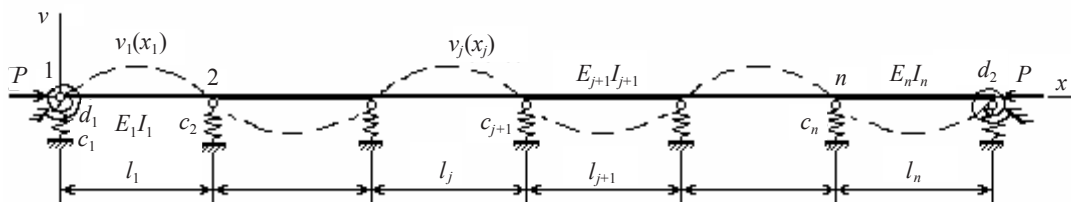


Рис. 1

Ставится задача об определении спектра собственных значений  $P_k$ .

Изогнутая ось каждого пролета при потере устойчивости описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$v_j^{IV} + k_j^2 v_j = 0, \quad k_j^2 = P/b_j, \quad b_j = E_j I_j, \quad (1)$$

$$x \in (0, l_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $v_j(x_j)$  – функции прогибов;  $x_j$  – локальные

$$\begin{aligned} b_j v_j''(l_j) - b_{j+1} v_{j+1}''(0) &= 0, \\ b_j v_j'''(l_j) - b_{j+1} v_{j+1}'''(0) - c_{j+1} v_{j+1}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Подстановка (2) в (3), (4) дает матрично-векторное уравнение

$$\mathbf{F}\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Вектор  $\mathbf{A}$  образован постоянными интегрирования, матрица  $\mathbf{F}$  является квадратной порядка

4и и получается из процедур подстановки и элементарных преобразований. Элементы матрицы зависят от искомых значений  $P$ , т.е.  $f_{ij} = f_{ij}(P)$ . Ненулевые значения элементов вектора  $\mathbf{A}$  (хотя бы одного) возможны лишь в том случае, если определитель матрицы  $\mathbf{F}$  равен нулю. Это требование приводит к трансцендентному уравнению

$$\det \mathbf{F}(P) = 0, \quad (5)$$

решение которого аналитическими методами затруднительно и достигается в замкнутом виде лишь в некоторых простых случаях. Применение же численных методов сопряжено со сложностями редукции задачи в численные схемы с их последующей программной реализацией. Приближенные значения корней высокой точности можно найти графическими способами, основанными на возможности быстрой визуализации функции в левой части (5) с помощью современных компьютерных средств [1]. С этой целью в координатной системе  $P - \det(\mathbf{F})$  строится кривая, точки пересечения которой с осью  $P$  определяют значения критических сил.

Для тестирования этого способа рассмотрен трехпролетный стальной стержень круглого поперечного сечения с диаметром 20 мм и параметрами  $n = 3$ ,  $E = 200$  ГПа,  $\mathbf{l} = \{1, 2, 1\}$  м,  $\mathbf{d} = \{0; 0\}$  Н·м,  $\mathbf{c} = \{1; 0; 0; 1\} \cdot 10^{20}$  Н/м.

При подобном выборе коэффициентов упругости гибких опор с стержень становится фактически однопролетным длиной  $L = 4$  м. Тогда критические силы определяются по известной формуле

$$P_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{L^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Для первых трех значений проведены вычисления по (6) и графическим способом. На рис. 2а показан график  $P - \det(\mathbf{F})$ . Кривая пересекает горизонтальную ось в точках  $P_k = \{968.95; 9875.79; 8720.51\}$  Н. Эти числа точно совпадают с критическими силами (6) при  $k = 1, 2, 3$  и легко читаются с экрана монитора при увеличении фрагментов рисунка (рис. 2б)

Для демонстрации возможностей предлагаемого алгоритма проведены вычисления при тех же данных, но для стержня с неодинаковыми поперечными сечениями  $\mathbf{I} = (I_0, 4I_0, 0.9I_0)$  и коэффициентами упругости опор в виде векторов

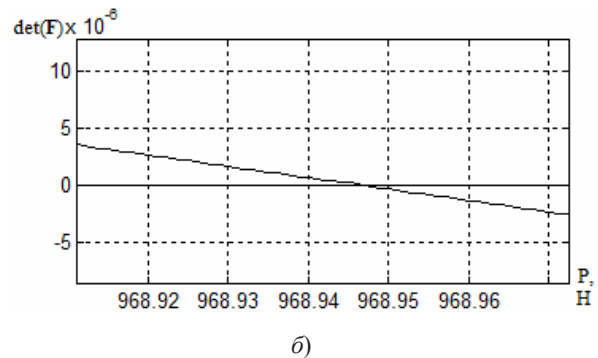
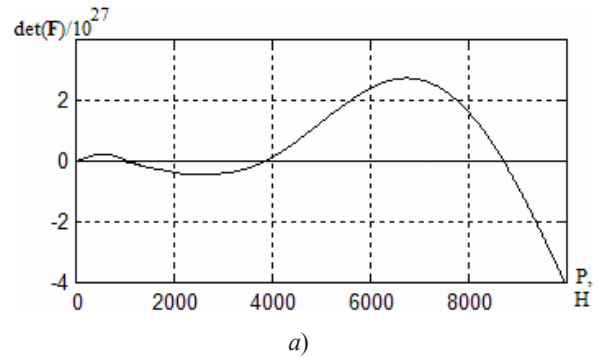


Рис. 2

$\mathbf{c} = \{1020; 1000; 1000; 1020\}$  Н/м,  $\mathbf{d} = \{1000; 0\}$  Н·м. Здесь  $I_0$  — осевой момент инерции стержня, рассмотренного выше, значения  $c_1, c_4$  имитируют абсолютно жесткое опирание крайних опор.

Получены три первых значения критической силы  $P_k = \{3636.69; 6658.16; 15597.06\}$  Н.

Сравнение с предыдущими величинами показывает существенное увеличение последних. Введение дополнительных упругих опор и изменение моментов инерции поперечных сечений в пролетах привело к увеличению общей жесткости конструкции и, как следствие, к возрастанию критических сил.

Из анализа следует вывод о сравнительной простоте и эффективности предлагаемого графоаналитического способа определения критических сил в сложных задачах об устойчивости стержней.

#### Список литературы

1. Барагунова Л.А. Определение критической силы сжатого стержня с промежуточными опорами // Наука, техника и технология XXI века (НТТ-2005): Матер. второй Всеросс. научно-технич. конф. Ч. II. Нальчик: Каб.-Балк. ун-т, 2005. С. 16–20.

**ON THE STABILITY OF A MULTI-SPAN COLUMN ON FOIL BEARING***T.Yu. Chechenov*

Stability of a multi-span fixed column on foil bearing is examined. The eigenvalue problem leads to the transcendental characteristic equation, the solution of which by the analytical and numerical methods is connected with significant difficulties. It is proposed to determine critical forces with the help of visualization of the graph of the left side of the equation, using a computer. A test example illustrates the high accuracy of the obtained critical forces. A specific example demonstrating the potential of the proposed algorithm is given.

*Keywords:* stability, fixed column, eigenvalues, critical forces, foil bearing.