Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1853–1854

УДК 539.3; 517.9

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ю.А. Чиркунов

Новосибирский государственный технический университет

chr01@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

С помощью группового расслоения получена в [1] эквивалентная уравнениям Ламе динамической теории упругости система первого порядка (*RL*), содержащая наименьшее число дополнительных функций, которая включает в себя две классические системы математической физики: систему уравнений безвихревой акустики и систему уравнений Максвелла. Исследована структура инвариантных и некоторых классов частично инвариантных решений системы (*RL*). С точностью до преобразований эквивалентности найдены все эволюционные симметрические t-гиперболические по Фридрихсу системы, равносильные системам трехмерных волновых уравнений [2]. Получена конформно-инвариантная эволюционная симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система, описывающая волны сдвига в трехмерной упругой среде. С помощью комплексных переменных она записывается в удобном для получения точных решений виде. Получены частично инвариантные решения.

Ключевые слова: групповое расслоение, динамическая теория упругости, конформная инвариантность, системы Фридрихса, волны сдвига в трехмерной упругой среде.

1. Система (*RL*)

Основная группа Ли преобразований уравнений Ламе динамической теории упругости

$$\mathbf{u}_{tt} = \alpha_0 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{u}, \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x) \in R^n$ – вектор перемещений; t – время; $x \in R^n$ ($n = 2$; 3); $\alpha_0 > 2$ – постоянная, характеризующая упругие свойства среды, допускают бесконечную группу Ли преобразований с нормальным делителем, порождаемым операторами:

$$\mathbf{u}_0(t,x)\cdot\partial_{\mathbf{u}}, \qquad (1.2)$$

($\mathbf{u}_0(t,x)$ – произвольное решение уравнений (1.1)).

Операторы (1.2) могут быть использованы для преобразования системы (1.1) в равносильную ей с помощью группового расслоения. Групповое расслоение уравнений Ламе относительно группы с операторами $\nabla h(x)\cdot\partial_{\mathbf{u}}$ ($h(x)$ – произвольная гармоническая функция) таково: система

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{v}(t, x), \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = \theta(t, x), \quad \operatorname{rot}\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}(t, x) \qquad (1.3)$$

является автоморфной системой, а система

$$\mathbf{v}_t = \alpha_0\nabla\theta - \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}, \quad \theta_t = \operatorname{div}\mathbf{v},$$
$$\boldsymbol{\omega}_t = \operatorname{rot} v, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0 \qquad (1.4)$$

– разрешающей системой этого группового расслоения.

Если в системе (1.4) заменить вектор **v** на вектор перемещений **u**, то получится система

$$\mathbf{u}_t = \alpha_0\nabla\theta - \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}, \quad \theta_t = \operatorname{div}\mathbf{u},$$
$$\boldsymbol{\omega}_t = \operatorname{rot}\mathbf{u}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0 \qquad \text{(RL)}$$

содержащая меньшее, чем система (1.3), (1.4), число дополнительных функций, а именно: θ, $\mathbf{w}$.

Теорема 1.1. *Система* (*RL*) *равносильна уравнениям Ламе* (1.1), *то есть для любого решения* ($\mathbf{u}$, θ, $\boldsymbol{\omega}$) *системы* (*RL*) *функция* $\mathbf{u}$ *является решением системы* (1.1), *и обратно: для любого решения* $\mathbf{u}$ *системы* (1.1) *найдутся функции* θ, $\boldsymbol{\omega}$ *такие, что* ($\mathbf{u}$, θ, $\boldsymbol{\omega}$) *является решением системы* (*RL*).

Теорема 1.2. *Среди систем первого порядка, равносильных уравнениям Ламе, система* (*RL*) *имеет наименьшее число дополнительных функций. Любая система первого порядка, равносильная уравнениям Ламе, с тем же, что и* (*RL*), *числом дополнительных функций, совпадает с ее эволюционной частью с точностью до линейного невырожденного преобразования дополнительных функций.*

Система (*RL*) допускает ту же самую группу, что и уравнения Ламе, только действующую в другом пространстве. Она включает в себя две классические системы математической физики: при $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ она совпадает с системой уравнений безвихревой акустики

$$\mathbf{u}_t = \alpha_0\nabla\theta, \quad \theta_t = \operatorname{div}\mathbf{u}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{u} = 0, \qquad (1.5)$$

допускающей группу Лоренца, а при $\theta = \text{const}$ – с конформно-инвариантными уравнениями Максвелла

$$\mathbf{u}_t = -\operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega}_t = \operatorname{rot}\mathbf{u},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0, \qquad (1.6)$$

что позволяет использовать более широкие группы для получения точных решений уравнений Ламе.

Теорема 1.3. *Любое решение системы* (RL) *есть сумма решений уравнений безвихревой акустики и уравнений Максвелла.*

Исследована структура инвариантных и некоторых классов частично инвариантных решений системы (RL). В частности, получено: любое инвариантное динамическое H-решение системы (RL) есть сумма инвариантных H-решений уравнений безвихревой акустики и уравнений Максвелла; любая простая волна системы (RL) является либо простой волной уравнений безвихревой акустики, либо простой волной уравнений Максвелла; для любого нередуцируемого частично инвариантного решения дефекта 2 ранга 1 на подгруппе с операторами ∂_t, ∂_{x_1}, ∂_{x_2}, $t\partial_t + x\partial_x$, $x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1} + u_1\partial_{u_2} - u_2\partial_{x_1}$ системы (RL) при $n = 2$ одна из функций θ или ω тождественно постоянны.

2. Волны сдвига в трехмерной упругой среде

С точностью до преобразований эквивалентности найдены все эволюционные симметрические t-гиперболические по Фридрихсу системы, равносильные системам трехмерных волновых уравнений. Соленоидальная составляющая вектора перемещений $\mathbf{u} = \mathrm{rot}\ \mathbf{v}(t, x)$ описывает волны сдвига в трехмерной упругой среде и определяется векторным потенциалом $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x)$, который можно выбрать следующим образом:

$$\mathbf{v} = v_1(t, x)\mathbf{e} + \mathrm{rot}\ [v_2(t, x)\mathbf{e}].$$

Здесь $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ – орт оси Ox; $v_1 = v_1(t, x)$, $v_2 = v_2(t, x)$ – скалярные поперечные потенциалы, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} \partial_t^2 v_1 &= \partial_{x_1}^2 v_1 + \partial_{x_2}^2 v_1 + \partial_{x_3}^2 v_1, \\ \partial_t^2 v_2 &= \partial_{x_1}^2 v_2 + \partial_{x_2}^2 v_2 + \partial_{x_3}^2 v_2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Множество эволюционных симметрических t-гиперболических по Фридрихсу систем, равносильных системе (2.1) и содержащих наименьшее число дополнительных функций, с точностью до преобразований эквивалентности состоит из конформно-инвариантной системы

$$\begin{aligned} \partial_t w_1 &= -\partial_{x_1} w_1 + \partial_{x_2} w_3 + \partial_{x_3} w_4, \\ \partial_t w_2 &= -\partial_{x_1} w_2 + \partial_{x_2} w_4 - \partial_{x_3} w_3, \\ \partial_t w_3 &= \partial_{x_1} w_3 + \partial_{x_2} w_1 - \partial_{x_3} w_2, \\ \partial_t w_4 &= \partial_{x_1} w_4 + \partial_{x_2} w_2 + \partial_{x_3} w_1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для любого решения (w_1, w_2, w_3, w_4) системы (2.2) каждая пара функций w_k, w_j ($k \neq j$) является решением $v_1 = w_k$, $v_2 = w_j$ системы (2.1). Для любого решения (v_1, v_2) системы (2.1) найдутся функции w_3, w_4 такие, что вектор-функция, компонентами которой служат всевозможные перестановки функций v_1, v_2, w_3, w_4, является решением системы (2.2).

С помощью комплексных переменных $\tau = (x_1 + t)$, $\xi = (x_2 - ix_3)$, $\eta = (x_2 + ix_3)$, $\zeta = (x_1 - t)$, $p = w_1 - iw_2$, $q = -w_3 + iw_4$ система (2.2) записывается в виде: $\partial_\tau p + \partial_\xi q = 0$, $\partial_\eta p - \partial_\zeta q = 0$, удобном для получения точных решений. Приведены примеры частично инвариантных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН № 103.

Список литературы

1. Чиркунов Ю.А. Групповое расслоение уравнений Ламе классической динамической теории упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. №3. С. 47–54.

2. Чиркунов Ю.А. Системы Фридрихса для систем волновых уравнений и волны сдвига в трехмерной упругой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51, №6. С. 121–132.

CONFORMAL INVARIANCE IN THE THEORY OF ELASTICITY

Yu.A. Chirkunov

With the help of a group foliation a first-order system (RL) is obtained equivalent to Lame equations of the dynamical theory of elasticity. System (RL) includes the following two classical systems of mathematical physics: the system of equations of vortex-free acoustics and the system of Maxwell equations. The structure of the invariant solutions and some partially invariant solutions of the system (RL) are investigated. Friedrichs t-hyperbolic symmetric evolutionary systems equivalent to wave equations with two and three space variables are found to equivalence transformations. A conformal-invariant Friedrichs t-hyperbolic symmetric evolutionary system is obtained, which describes shear waves in a three-dimensional elastic medium. Using complex variables, this system is written in the form convenient for obtaining its exact solutions. Some partially invariant solutions are also obtained.

Keywords: group foliation, dynamical theory of elasticity, conformal invariance, Friedrichs systems, shear waves in a three-dimensional elastic medium.