УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ИНДЕНТОРА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ С ТРЕНИЕМ

Н.В. Баничук, С.Ю. Иванова

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

banichuk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается контактная задача оптимизации формы штампа при ограничениях на прикладываемые к нему силу и моменты. Движение штампа исследуется в квазистатической постановке с учетом возникающих сил трения. Оптимальная форма штампа находится в трехмерной постановке задачи отыскания давления индентора на трехмерное полупространство. Предлагается новая декомпозиция задачи оптимизации на отдельное решение задачи о наилучшем допустимом внешнем воздействии и решение задачи о проникании индентора в упругую среду с учетом трения. В качестве примера приводится решение задачи о внедрении прямоугольного в плане штампа.

Ключевые слова: контактная задача, квазистатическая постановка, оптимизация формы штампа, декомпозиция задачи оптимизации.

Рассмотрим в квазистатической постановке пространственную контактную задачу о поступательном движении абсолютно жесткого штампа с постоянной скоростью вдоль поверхности полупространства $z \geq 0$, заполненного упругой средой. Считается, что система координат xyz скреплена со штампом, а движение происходит в направлении оси x. Предполагается, что в области Ω контакта штампа и упругой среды действуют нормальные (σ_{zz}) и тангенциальные (σ_{xz}) напряжения

$$\begin{gathered}\sigma_{zz}(x,y,0) = -p(x,y), \quad p(x,y) \geq 0, \\ \sigma_{zz} = \tau_0 + \mu p(x,y),\end{gathered} \tag{1}$$

где $p \geq 0$ – давление на поверхности контакта, а τ_0 и μ – константы взаимодействия с предельным трением, причем силы трения, действующие на площадке контакта, коллинеарны направлению движения [1, 2]. Граничные условия краевой задачи теории упругости для полупространства $z \geq 0$ имеют вид:

$$\begin{gathered}w = f(x,y), \quad \sigma_{xz} = \tau_0 - \mu\sigma_{zz}, \\ \sigma_{yz} = 0, \quad (x,y) \in \Omega_f; \\ \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad (x,y) \notin \Omega_f.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $w = w(x, y)$ – компонента вектора упругих перемещений в направлении оси z, а $f(x, y)$ – форма поверхности штампа, находящейся в контакте с упругой средой. При известном распределении давления $p(x, y)$ ($(x, y) \in \Omega_f$) результирующая сила P и момент M относительно оси y, прикладываемые к штампу, определяются выражениями

$$P = \int_{\Omega_f} p\,d\Omega_f, \quad M = \int_{\Omega_f} xp\,d\Omega_f. \tag{3}$$

Задача оптимизации заключается в отыскании функции $f(x, y)$, доставляющей минимум функционалу рассогласования

$$J = J(p(f)) = \int_{\Omega_f} (p_g - p(f))^2 d\Omega_f \to \min_f. \tag{4}$$

При удовлетворении условиям равновесия и положительности нормального давления в области контакта

$$\begin{gathered}f \in \Lambda_f = \{f: \; p(f) \geq 0, \quad \int_{\Omega_f} p(f)d\Omega_f = P^*, \\ \int_{\Omega_f} xp(f)d\Omega_f = M^*\}.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $p_g(x, y)$ – заданное целевое распределение давления; P^*, M^* – заданные положительные величины. Решение сформулированной задачи оптимизации (4), (5) допускает эффективную декомпозицию [3] и сводится к последовательному решению двух задач. Первая задача состоит в минимизации функционала

$$J = J(p) = \int_{\Omega_f} (p_g - p)^2 d\Omega_f \to \min_p \tag{6}$$

на множестве функций $p(x, y)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered}p \in \Lambda_p = \{p: \; (p)_{\Omega_f} \geq 0, \quad \int_{\Omega_f} p\,d\Omega_f = P^*, \\ \int_{\Omega_f} xp\,d\Omega_f = M^*\},\end{gathered} \tag{7}$$

и отыскании наилучшего допустимого (в смысле (7)) распределения давления $p_*(x, y)$. Вторая задача заключается в отыскании нормальных смещений $w_*(x, y)$, соответствующих оптимальному распределению давления и определяющих искомую оптимальную форму штампа $f_*(x, y) = w_*(x, y)$. Для определения нормальных смещений $w_*(x, y)$ решается пространственная краевая задача теории упругости для полупространства $z \geq 0$ с заданными граничными напряжениями в области Ω_f и нулевыми напряжениями вне области контакта

$$\sigma_{zz} = -p_*(x,y), \quad \sigma_{xz} = \tau_0 + \mu p_*,$$
$$\sigma_{yz} = 0, \quad (x,y) \in \Omega_f; \qquad (8)$$
$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad (x,y) \notin \Omega_f.$$

Для отыскания оптимального распределения давления $p_*(x, y)$ из решения задачи (6), (7) воспользуемся стандартным приемом, основанным на введении вспомогательной переменной и составлении расширенного функционала Лагранжа. В случае рассмотрения симметричной относительно осей x и y области контакта Ω_f, когда в качестве заданного распределения давления p_g берется среднее давление, будем иметь

$$p_*(x, y) = \frac{P^*}{S} + \frac{M^* x}{I_y}, \qquad (9)$$

где S – площадь, а I_y – момент инерции области контакта Ω_f.

Для решения краевой задачи (8), (9) и определения оптимальной формы штампа $f_*(x, y)$ воспользуемся точным решением [1, 2, 4]:

$$w_{xy} = \kappa_0 Q_z^0 / r + \kappa_+ (x - x')Q_x^0 / r^2,$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \qquad (10)$$

$$\kappa_0 = \frac{1-\nu^2}{\pi E}, \quad \kappa_+ = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E},$$

задачи о действии сосредоточенной силы

$$q = \{Q_x, Q_z\} = \{Q_x^0 \delta(x-x', y-y'),$$
$$Q_z^0 (x-x', y-y')\}, \qquad (11)$$

приложенной к поверхности $z = 0$ упругого полупространства $z \geq 0$ в точке (x', y'). Здесь Q_x^0, Q_z^0 – соответствующие компоненты сосредоточенной силы, а δ – дельта-функция. Далее, полагая

$$Q_x^0 = (\tau_0 + \mu p_*(x', y'))dx'dy',$$
$$Q_z^0 = p_*(x', y')dx'dy',$$

проводим интегрирование правой части равенства (10) по области Ω_f и находим оптимальную форму индентора $f_*(x, y)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №11-08-00030а), в рамках Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН №13 и Программы поддержки ведущих научных школ (грант №169.2008.1).

Список литературы

1. Ляв А.Е. Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935.
2. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2002. 478 с.
3. Баничук Н.В. Оптимизация контактного давления в задаче о взаимодействии штампа и упругой среды // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 3. С. 469–477.
4. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 492 с.

THE PUNCH SHAPE OPTIMIZATION IN CONTACT PROBLEMS WITH FRICTION

N.V. Banichuk, C.Yu. Ivanova

The contact problem of punch shape optimization under constraints on the applied forces and moments is considered. The motion of the punch is investigated in a quasi-static formulation, taking into account the friction forces. The optimal punch shape is found as a solution of the optimization problem of determining the pressure distribution acting on an elastic half-space in a 3D formulation. The new decomposition of the optimization problem into a separate solution of the problem of the best possible external action and a solution of the problem of the penetration of the punch into elastic medium with friction is discussed. As an example the solution of a rectangular punch penetration is presented.

Keywords: contact problem, quasi-static statement, punch shape optimization, decomposition of optimization problem.