УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДАМИ МНОГОМЕРНОГО КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

А.А. Шеина, А.И. Александрович

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

sheinaa@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается новый аналитико-численный метод решения трехмерных краевых задач нелинейной теории упругости Мурнагана, позволяющий учитывать поведение материала при больших деформациях. Метод основан на применении средств комплексного анализа в сочетании со стандартными численными методами оптимизации. Получены численные решения задач об одноосном растяжении и простом кручении конечного кругового цилиндра с симметричной боковой выточкой.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, пространственные граничные задачи, модель Мурнагана, теория функций двух комплексных переменных, большие деформации.

Постановка задачи

Модель упругой среды Мурнагана (F.D. Murnaghan) определяется представлением удельной потенциальной энергии деформации полиномом по степеням компонент тензора деформации Коши–Грина и удерживанием всех слагаемых второй (или более) степени относительно градиента перемещений [2]. Полная система уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние упругого тела в модели Мурнагана состоит из уравнений равновесия, рассматривающихся в случае отсутствия массовых сил, и квадратичного закона Мурнагана. В тензорном виде в выбранной евклидовой системе координат она имеет вид:

$$\begin{cases} \overset{0}{\nabla}\cdot T = 0, \\ T = (1-\theta)T^0 + 2\overset{0}{\varepsilon}(u)\cdot T^0 + T^{/}, \end{cases}$$

$$T^0 = \lambda\theta E = 2\mu\overset{0}{\varepsilon}(u),$$

$$T^{/} = \frac{1}{2}\left[\lambda\chi + l\theta^2 - \left(m - \frac{n}{2}\right)\kappa\right]E +$$

$$+2\left(m-\frac{n}{2}\right)\overset{0}{\varepsilon}(u)\theta + n\overset{0}{\varepsilon}(u)^2 + \mu\overset{0}{\nabla}u^T\overset{0}{\nabla}u,$$

$$\theta = \overset{0}{\nabla}u, \quad \kappa = \theta^2 - I_1\left(\overset{0}{\varepsilon}(u)^2\right),$$

$$\chi = I_1\left(\overset{0}{\nabla}u^T\overset{0}{\nabla}u\right),$$

где T – тензор напряжений; u – вектор перемещений; E – единичный тензор; I_1 – первый инвариант тензора деформаций; $\overset{0}{\varepsilon}(u) = 1/2\left(\overset{0}{\nabla}u + \overset{0}{\nabla}u^T\right)$ – тензор малых деформаций Коши; λ, μ – упругие модули Ламе (постоянные Ламе второго порядка), выражающиеся через модуль Юнга и коэффициент Пуассона по известным формулам классической теории упругости; l, m, n – постоянные Мурнагана, выражающиеся через постоянные Ламе третьего порядка ν_1, ν_2, ν_3. Для данной задачи был выбран материал – медь со следующими числовыми значениями его характеристик [1]:

$$\lambda = 1.07\cdot10^{11}\ \text{Н/м}^2,\ \mu = 0.477\cdot10^{11}\ \text{Н/м}^2,$$
$$\nu_1 = -5.6\cdot10^{11}\ \text{Н/м}^2,\ \nu_2 = -1.72\cdot10^{11}\ \text{Н/м}^2,$$
$$\nu_2 = -3.98\cdot10^{11}\ \text{Н/м}^2.$$

Рассмотрены следующие граничные задачи:

1) растяжение конечного цилиндра переменного радиуса (однополостный гиперболоид);

2) кручение конечного цилиндра.

Таким образом, задача состоит в отыскании решения, удовлетворяющего уравнениям равновесия, в которых напряжения определяются, исходя из закона Мурнагана, и удовлетворяющего поставленным граничным условиям.

Метод решения

Для решения задачи вводится комплексная структура в пространство переменных x_1, x_2, x_3, x_4: $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$, и перемещений u_1, u_2, u_3, u_4: $W_1 = u_1 + iu_2$, $W_2 = u_3 + iu_4$ [3].

Будем рассматривать трехмерную область V, занятую упругой средой, как сечение некоторой четырехмерной области Ω гиперплоскостью $x_4=0$ в четырехмерном евклидовом пространстве с координатами x_1, x_2, x_3, x_4. Построение области Ω по заданной области V неоднозначно, единственное требование при этом: чтобы любое сечение Ω гиперплоскостями $x_4 = \text{const}$ проецировалось в V. Для решения поставленной задачи выбирается четырехмерная область таким образом, чтобы ее сечение плоскостью $x_4 = 0$ совпадало с рассматриваемым трехмерным телом.

С учетом особенностей выбора четырехмерной области требуется выполнение условия независимости компонент вектора перемещений от переменной x_4, а именно

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_4} = \frac{\partial u_2}{\partial x_4} = \frac{\partial u_3}{\partial x_4} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4} = 0,$$

что соответствует

$$\frac{\partial W_i}{\partial z_2} = \frac{\partial W_i}{\partial \bar{z}_2}, \quad \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial z_2} = \frac{\partial \overline{W}_i}{\partial \bar{z}_2}, \quad i = 1,2.$$

Особенность применения теории функций двух комплексных переменных – это возможность аналитического продолжения голоморфных функций через некоторые участки границы с использованием, например, теоремы Хартогса [3], что позволяет сложную конфигурацию четырехмерной области упростить до ее оболочки голоморфности [4].

Исходные уравнения записываются в комплексной форме, а искомые комплекснозначные функции W_1, $\overline{W_1}$, W_2 представляются в виде разложений по степеням двух комплексно-сопряженных независимых переменных с коэффициентами, представляющими собой некоторые голоморфные функции. Например,

$$W_1 = \sum_{i_1=0}^{M} \sum_{i_2=0}^{M} \varphi_{i_1,i_2}(z_1, z_2) \bar{z}_1^{\,i_1} \bar{z}_2^{\,i_2},$$

где $\varphi_{i_1,i_2}(z_1, z_2)$ – произвольные голоморфные функции двух комплексных переменных. Составляются невязки: по граничным условиям и уравнений равновесия модели Мурнагана, которые минимизируются методом покоординатного одношагового спуска с изменяемым шагом по каждому координатному направлению.

Численные результаты

Проведенные численные эксперименты показали, что поставленные граничные задачи нелинейной теории упругости в среде Мурнагана с использованием предложенного метода, основанного на применении теории функций двух комплексных переменных, удается решать приближенно, добиваясь необходимой точности решения путем увеличения числа коэффициентов в голоморфных разложениях искомых функций.

Список литературы

1. Александрович А.И., Шеина А.А. Решение плоских граничных задач нелинейной теории упругости модели Синьорини с помощью ТФКП // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. С. 43–53.

2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. С. 155–158.

3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1976.

4. Рудин У. Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974.

SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY USING THE METHODS OF MULTI-DIMENSIONAL COMPLEX ANALYSIS

A.A. Sheina, A.I. Alexandrovich

A new analytical-numeric method for the solution of 3D boundary value problems of nonlinear elasticity theory of Murnagan's model is considered. Murnagan's model allows to account for finite deformations of the material. The method suggested is based on the application of complex analysis methods in combination with standard numerical optimization techniques. The method is used to numerically solve the problems on uniaxial tension and simple torsion of a finite cylinder with symmetrical side recess.

*Keywords:*nonlinear theory of elasticity, three-dimensional boundary value problems, 3D boundary value problems, Murnagan's model, two complex variable theory of functions, finite deformations.