УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ВЗАИМНОСТИ К РЕШЕНИЮ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е.И. Шифрин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

shifrin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Дан обзор полученных за последнее время результатов автора, касающихся развития метода идентификации дефектов в изотропном линейно упругом теле, основанного на применении функционала взаимности. В частности, представлено аналитическое решение задачи идентификации эллипсоидального дефекта (полости или включения) по результатам одного статического испытания на одноосное растяжение (сжатие).

Ключевые слова: линейная теория упругости, обратная задача, принцип взаимности, эллипсоидальный дефект.

1. Постановка задачи

Пусть $V \subset R^3$ – односвязная область, границу которой обозначим ∂V; $V \subset V$ – подобласть, $\overline{G} \subset V$ – замыкание области G; $\Omega = V \setminus \overline{G}$. Предположим, что изотропное, линейно упругое тело с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M занимает область Ω. Пусть $OX_1X_2X_3$ – декартова система координат. Напряженно-деформированное состояние в теле, занимающем область Ω, обозначим верхним индексом d: σ_{ij}^d – тензор напряжений, e_{ij}^d – тензор деформаций, $\mathbf{u}^d = (u_1^d, u_2^d, u_3^d)$ – вектор перемещений. Обозначим $\mathbf{t}^d = (t_1^d, t_2^d, t_3^d)$ – самоуравновешенные усилия, приложенные к внешней границе тела ∂V, $t_i^d = \sigma_{ij}^d n_j$; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичная внешняя нормаль к ∂V. Предполагается, что объемные силы отсутствуют. Дефект G может быть полостью, трещиной или включением (жестким или линейно упругим). Если G – полость или трещина, то предполагается, что ее граница ∂G свободна от усилий. Если G – включение, предполагается полное сцепление между матрицей и включением. Предположим, что в эксперименте усилия $\mathbf{t}^d$ и перемещения $\mathbf{u}^d$ измеряются на внешней поверхности тела ∂V. Задача заключается в идентификации дефекта G по известным усилиям и перемещениям на внешней границе тела.

2. Функционал взаимности, его свойства и связь с инвариантными интегралами

Обозначим верхним индексом r регулярное упругое поле, то есть упругое поле, не имеющее особенностей внутри области V (σ_{ij}^r – тензор напряжений, e_{ij}^r – тензор деформаций, $\mathbf{u}^r = (u_1^r, u_2^r, u_3^r)$ – вектор перемещений). Определим билинейный функционал

$$RG(d,r) = \int_{\partial V} (t_i^d u_i^r - t_i^r u_i^d) dS. \qquad (1)$$

Здесь $t_i^r = \sigma_{ij}^r n_j$ и по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Значения этого функционала могут быть вычислены для любого регулярного поля r, поскольку вектор-функции $\mathbf{t}^d$ и $\mathbf{u}^d$ предполагаются известными на границе ∂V. Заметим, что если внутри области V нет дефектов, то $RG(d, r) = 0$ для любого регулярного поля r. В противном случае найдутся регулярные поля, для которых значения функционала отличны от нуля, и эти значения дают информацию о дефекте. Аналогичными свойствами обладают и инвариантные J, M и L – интегралы [1], а также соответствующие им интегралы, зависящие от двух напряженных состояний [2]. Возникает естественный вопрос: дают ли инвариантные интегралы дополнительную информацию о дефекте по сравнению с функционалом взаимности (1) или нет? Этот вопрос был исследован в [3], где доказано, что эти интегралы выражаются через функционал взаимности и, следовательно, не дают никакой дополнительной информации. Рассмотрим случай, когда область V занимает все пространство $V = R^3$. Обозначим верхним индексом mn регулярное упругое поле в R^3 с постоянными напряжениями

$$\sigma_{ij}^{mn} = \sigma(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2, \qquad (2)$$

где σ имеет размерность напряжений.

Обозначим верхним индексом kld упругое поле в безграничном пространстве с дефектом G, удовлетворяющее условиям на бесконечности

$$\lim_{X\to\infty} \sigma_{ij}^{kld}(X) = \sigma_{ij}^{kl}.$$

Определим тензор четвертого ранга $R_{klmn} = RG(kld, mn)$. В [4] показано, что тензор R_{klmn} обладает следующими симметриями:

$$R_{klmn} = R_{lkmn} = R_{klnm} = R_{mnkl}. \tag{3}$$

3. Решение задачи идентификации эллипсоидального дефекта

Предположим, что область V занимает все пространство, а дефект G имеет форму эллипсоида с центром в точке $M^0 = (X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ и полуосями a_1, a_2 и a_3, направленными вдоль единичных векторов $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ соответственно. Предположим также, что на бесконечности заданы напряжения σ_{ij}^{33}, отвечающие одноосному растяжению (сжатию) вдоль оси X_3. Для того чтобы подчеркнуть вид приложенной нагрузки, значения функционала взаимности, соответствующие этой нагрузке, будем обозначать $RG(33d, r)$. В [5] показано, что координаты центра эллипсоида могут быть получены с помощью регулярных упругих полей с постоянными напряжениями и напряжениями, линейно зависящими от координат. Рассмотрим регулярные поля с напряжениями следующего вида:

$$\boldsymbol{\sigma}^{L1} = \frac{\sigma}{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{L2} = \frac{\sigma}{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{L3} = \frac{\sigma}{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -X_1 & 0 & X_3 \end{pmatrix},$$

где L имеет размерность длины.

Согласно результатам из [5], имеем

$$\frac{X_1^0}{L} = \frac{RG(33d, L1)}{R_{3333}}, \quad \frac{X_2^0}{L} = \frac{RG(33d, L2)}{R_{3333}}, \tag{4}$$
$$\frac{X_3^0}{L} = \frac{R_{3333}RG(33d, L3) + 2R_{3313}RG(33d, L1)}{R_{3333}^2}.$$

После определения центра эллипсоида рассмотрим декартову систему координат с началом в центре эллипсоида $M^0x_1x_2x_3$, $X_i = x_i + X_i^0$. Обозначим

$$\int_G x_i x_j dx = \frac{|G|\, z_{ij}}{5},$$

где $|G|$ – объем эллипсоида. Величины z_{ij} выражаются через квадраты полуосей эллипсоида и косинусы углов между осями координат и осями эллипсоида. В [6] показано, что для регулярных упругих полей Qk с напряжениями, квадратично зависящими от координат x_1, x_2, x_3, значения функционала взаимности могут быть записаны в виде $RG(33d, Qk) = \alpha_{ijmn}^k R_{33mn} z_{ij}$, где постоянные α_{ijmn}^k явно вычисляются. Выбирая шесть регулярных полей $Q_1, \ldots, Q_6$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных z_{ij}. После определения величин z_{ij} строится симметричная матрица $\mathbf{Z} = (z_{ij})$. Доказано [6], что a_1^2, a_2^2 и a_3^2 – собственные числа матрицы $\mathbf{Z}$, а $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ – соответствующие им собственные векторы. В [7] представлены численные результаты, иллюстрирующие эффективность предложенного метода решения обратной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00153).

Список литературы

1. Knowles J.K., Sternberg Eli. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Archive for rational mechanics and analysis. 1972. V. 44, No 3. P. 187–211.

2. Chen F.H.K., Shield R.T. Conservation laws in elasticity of the J-integral type // Zeitschrift fur angewandte mathematik und physik (ZAMP). 1977. V. 28. P. 1–22.

3. Шифрин Е.И. О связи между инвариантными интегралами линейной изотропной теории упругости и интегралами, определяемыми принципом взаимности // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 325–334.

4. Shifrin E.I. Symmetry properties of the reciprocity gap functional in the linear elasticity // International Journal of Fracture. 2009. V. 159, No 2. P. 209–218.

5. Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // Inverse Problems. 2010. V. 26, No 5. 055001 (17 pp).

6. Шифрин Е.И. Идентификация эллипсоидального дефекта в упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение (сжатие) // Изв. РАН, Механика твердого тела. 2010. №3. С. 131–142.

7. Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements // International Journal of Solids and Structures. 2011.

APPLICATION OF THE RECIPROCITY PRINCIPLE TO ELASTOSTATIC INVERSE PROBLEMS

E.I. Shifrin

A review of some recent results of the author on the development of a method, based on the reciprocity principle, for defect identification in an isotropic linear elastic body is presented. In particular, an analytical solution of the problem of an ellipsoidal defect (a cavity or an inclusion) identification using the results of one uniaxial tension (compression) static test is given.

Keywords: linear elasticity, inverse problem, reciprocity principle, ellipsoidal defect.